

Polinómios Ortogonais Tipo Pollaczek

Anabela Monteiro Paiva

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNO-
LOGIA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, área de especialização em Matemática Pura, tema de investigação em Teoria da Aproximação.

Conteúdo

Introdução	iii
1. Motivação	iii
2. Descrição do trabalho	iv
3. Notação e Nomenclatura	vii
4. Agradecimentos	viii
Capítulo I. Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais	1
1. Relação de Recorrência a Três Termos	1
2. Função Geradora	6
3. Teorema de Poincaré	10
4. Zeros de polinómios ortogonais	18
5. O que foi feito por Hahn	19
Capítulo II. Polinómios Ortogonais Tipo Pollaczek	21
1. Teoria Geral das Equações Diferenciais	21
2. Método de Laplace	24
3. Polinómios Associados e Teorema de Markov	25
4. Método de Pollaczek	28
5. Expressão da função geradora	33
Capítulo III. Polinómios Ortogonais Discretos	38
1. Caso Discreto	39
2. Fórmula de Rodrigues	41
3. Relação de Recorrência a Três Termos	45
4. Caso Contínuo	51
5. Teorema de Sturm	54

Capítulo IV. Polinómios Ortogonais Clássicos Co-Recursivos	59
1. Polinómios Ortogonais Co-Recursivos	60
2. Problema Principal	63
3. Polinómios Ortogonais Co-Recursivos dos Clássicos	64
4. Estudo das soluções do problema inicial	68
Bibliografia	76
Índice	78

Introdução

1. Motivação

O estudo da teoria geral dos polinómios ortogonais começou quando frequentei, na parte lectiva do curso de mestrado, a disciplina de Teoria Construtiva da Aproximação leccionada pelo professor Amílcar Branquinho. Fui adquirindo bases mais sólidas dos conceitos principais desta teoria com o estudo dos capítulos 1 e 2 do livro de T.S. Chihara [13] que foi um ponto de partida para o primeiro capítulo.

No segundo capítulo avanço com a análise e a compreensão de uma parte do trabalho de Pollaczek [26], onde se mostra como, a partir de uma qualquer relação de recorrência a três termos com coeficientes polinomiais de ordem n , se obtém a correspondente equação diferencial e como, ao resolvê-la, obtemos a expressão da função geradora respectiva. Depois farei uma breve descrição de como obter a respectiva medida de ortogonalidade.

Verifiquei também que os polinómios ortogonais clássicos estão inseridos nesta categoria, ou seja, são polinómios do tipo Pollaczek. O estudo deste artigo levou-me a aprofundar os conhecimentos da teoria das equações diferenciais, nomeadamente das equações do tipo Fuchs, das equações de Gauss e do método de Laplace.

Juntamente com o professor Branquinho mostrei, nos capítulos III e IV, como a teoria dos polinómios ortogonais evoluiu em torno dos clássicos Hermite, Laguerre, Jacobi e Bessel. A partir dos resultados apresentados por Lancaster em [18] relativos aos polinómios ortogonais discretos, realizámos um estudo análogo, tendo como motivação o método desenvolvido por Vicente Gonçalves em [30] e em [31].

A partir deste estudo fez-se uma extensão dos resultados para o caso contínuo onde, de modo natural, surgem as sucessões de polinómios ortogonais clássicos e as suas famílias co-recursivas.

2. Descrição do trabalho

Este trabalho está dividido em três partes. A primeira parte consiste numa breve incursão pela teoria geral dos polinómios ortogonais. Desta forma começaremos por definir funcional linear e sucessão de momentos que lhe está associada. A partir dela chegaremos às sucessões de polinómios ortogonais mónicos e às propriedades relativas a estes, definindo também a medida de ortogonalidade.

Depois, mostraremos que estas sucessões verificam uma relação de recorrência a três termos e, a partir desta relação chegaremos ao teorema de Favard. Seguiremos a demonstração de Pollaczek em [26].

O processo apresentado por Pollaczek para a obtenção da medida de ortogonalidade é válido na região de convergência uniforme da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}}$$

que representa a função geradora de momentos (u_n) .

A função geradora da família de polinómios $\{P_n\}$, dadas por

$$(2.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!} z^n,$$

desempenhará também um papel principal no estudo apresentado por Pollaczek.

De seguida apresentaremos um resumo da convergência pontual e uniforme de séries de funções. Este estudo é relevante na determinação da região de convergência, uma vez que se torna necessário, neste caso, analisar o comportamento assintótico das sucessões de polinómios ortogonais. Para a questão da convergência será demonstrado o teorema de Poincaré. No final deste capítulo estudaremos as propriedades relativas aos zeros dos polinómios ortogonais.

Nesta primeira parte incluiremos, também, o capítulo II onde iremos apresentar as ideias contidas no trabalho de Pollaczek para a obtenção da função geradora partindo da relação de recorrência a três termos e da equação diferencial que a verifica.

Como no trabalho de Pollaczek são utilizados os polinómios associados começaremos o capítulo com uma breve introdução relativa a estes e faremos também referência ao teorema de Markov seguindo a demonstração apresentada em [26].

Para apresentar o trabalho de Pollaczek consideramos a relação

$$P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

com condições iniciais $P_0(x) = 1$ e $P_{-1} = 0$, onde $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais não mónicos, não ortonormados e A_n, B_n e C_n são polinómios em n de grau fixo tais que $\frac{C_n}{A_{n-1}A_n} > 0$. Quando obtemos uma relação de recorrência a três termos onde os coeficientes são funções racionais temos sucessões de polinómios do tipo Pollaczek. Descreveremos o método que Pollaczek apresentou para a determinação da equação diferencial correspondente a esta relação de recorrência. Tal equação diferencial tem a forma

$$\left[p_0 \left(x \frac{d}{dx} \right) - \left(z p_1 \left(x \frac{d}{dx} \right) + p_2 \left(x \frac{d}{dx} \right) \right) x + x^2 p_3 \left(x \frac{d}{dx} \right) \right] g(x, z) = p_0(0).$$

No final veremos como se obtém a expressão da função geradora (2.1) correspondente. As equações diferenciais obtidas durante este processo são equações de Gauss, caso particular das equações tipo Fuchs. O estudo deste tipo de equações diferenciais será realizado no início do capítulo e terá como referência o livro de Favard [15]. Depois faremos uma breve descrição do método de Pollaczek para obter-se da medida de ortogonalidade.

No capítulo III, tendo como ponto de partida o trabalho [18] de Lancaster, faremos um estudo exaustivo da família de polinómios ortogonais $\{\Delta P_n\}$, onde o operador discreto Δ está definido como em [21]:

$$(2.2) \quad \Delta_h p(x) = \frac{p(x+h) - p(x)}{h}.$$

Nesse estudo determinaremos a fórmula de Rodrigues, os coeficientes da relação de recorrência a três termos, β_n e γ_n e a expressão da medida de ortogonalidade usando o método descrito por Vicente Gonçalves em [30] e em [31]. É importante salientar

que este processo é válido para qualquer operador discreto que se considere e que conseguimos chegar a estes resultados sem utilizar a ortogonalidade dos polinómios.

Obteremos seguidamente uma caracterização geral destas famílias de polinómios ortogonais discretos Caracterização de Hahan como em [13] e adaptando a caracterização de McCarthy em [22].

A partir destes resultados, tomando o limite, quando h tende para zero, em (2.2) obtemos as sucessões de polinómios ortogonais contínuos correspondentes. Procedendo de forma análoga para os coeficientes β_n e γ_n da relação de recorrência a três termos, obtemos os coeficientes relativos aos polinómios ortogonais clássicos.

Todos os resultados relativos à fórmula de Rodrigues, relação de recorrência e respectivos coeficientes podem ser obtidos para o caso contínuo através de um processo análogo ao utilizado no caso discreto. Como as propriedades dos zeros dos polinómios ortogonais são uma peça fundamental nesta teoria apresentaremos, no final deste capítulo, o Teorema de Sturm, que nos permite obter a localização dos zeros dos polinómios clássicos.

No capítulo IV, caracterizaremos as sucessões de polinómios co-recursivos da família clássica.

Começaremos com uma breve introdução aos conceitos de mudança afim na variável e polinómios co-recursivos.

Começaremos por mostrar que existe uma relação entre os polinómios associados de primeira ordem e a derivada de primeira ordem de $\{P_n\}$ dada pela seguinte equação:

$$[\phi D^2 + (2\phi' - \psi)D + (\lambda_n - \phi'' + \psi')I] P_{n-1}^{(1)} = 2(a_0 - b_0)P'_n.$$

Partindo desta equação determinaremos os coeficientes δ_n e ν_n da relação a três termos de uma nova família de polinómios ortogonais que designaremos por $\{\mathcal{P}_n\}$.

Apresentaremos na tabela 2 os coeficientes β_n e γ_n da relação de recorrência correspondente aos polinómios ortogonais clássicos e na tabela 3 os coeficientes δ_n e ν_n relativos aos novos polinómios \mathcal{P}_n .

Pretendemos relacionar estas duas famílias de polinómios usando uma expressão da forma:

$$\mathcal{P}_n(x) = P_n^{(c)}(ax + b; d)$$

com parâmetros livres α , β , δ_0 e ν_1 .

Para isso iremos obter uma relação entre os coeficientes das relações de recorrência destas duas famílias de polinómios. Com esse propósito começaremos por fazer a seguinte mudança afim na variável nas expressões de β_n e γ_n da tabela 2 e relacionando-as com as expressões dos coeficientes δ_n e ν_n dadas pela tabela 3 e que têm a seguinte forma

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \frac{\beta_{n+c} - b}{a} \\ \nu_{n+1} &= \frac{\gamma_{n+1+c}}{a^2} \\ \delta_0 &= \beta_0 - d.\end{aligned}$$

Através destas expressões encontraremos os parâmetros a, b, c, d em função dos parâmetros livres α , β , δ_0 e ν_1 . A sucessão de polinómios co-recursivos dos clássicos que se obtém também são do tipo Pollaczek.

No final do trabalho apresentaremos as expressões da medida de ortogonalidade dos polinómios clássicos que foram desenvolvidas por Askey e Wimp em [3], Bustoz e Ismail em [9] e Wimp em [33]. È importante referir que o método desenvolvido nestes trabalhos foi baseado no de Pollaczek descrito em [26].

3. Notação e Nomenclatura

Neste trabalho utilizamos o sistema de numeração indo-árabe para os capítulos e para as secções. Relativamente às Definições, Teoremas, Corolários e Lemas, a sua corresponde à ordem com que surgem no texto, isto é, se nos referirmos ao teorema 2.3 isto significa que nos encontramos na secção 2, teorema 3.

Representaremos por (u_n) a sucessão de momentos, por w a medida de ortogonalidade e por S a transformada de Stieltjes. Observe-se que designaremos as sucessões numéricas por $(.)$ e as sucessões de funções por $\{.\}$. designaremos as sucessões de polinómios ortogonais mónicos por $\{P_n\}$, reservando a notação $\{p_n\}$ para

as sucessão de polinómios ortonormais. Os coeficientes da relação de recorrência a três termos serão representados por β_n , γ_n e a função geradora por $g(x, z)$.

4. Agradecimentos

Agradeço ao Professor Doutor Amílcar Branquinho pela sua excepcional orientação e pelo seu incansável apoio que foram uma constante durante todo este trabalho.)

CAPÍTULO I

Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais

Como referimos, abordaremos neste capítulo a teoria geral dos polinómios ortogonais indicando alguns resultados que se mostraram relevantes para os próximos capítulos.

As provas de alguns destes resultados encontram-se em Chihara [13] que foi aqui usado como base. Também serão utilizados alguns resultados obtidos por Pollaczek em [26].

Iniciaremos o capítulo definindo funcional de momentos associada a uma sucessão de momentos (u_n) . Veremos que condições se devem impor para garantirmos a existência de uma sucessão de polinómios ortogonais e quando esta existe apresentaremos condições que nos garantem a sua unicidade.

De seguida, estabeleceremos o teorema de Favard, que será demonstrado como fez Pollaczek em [26]. Passaremos então para a função geradora de uma sucessão de polinómios ortogonais e determinaremos a sua região de convergência. Para garantir a existência desta região utilizaremos o Teorema de Poincaré aplicando-o ao caso dos polinómios ortogonais clássicos.

No final, faremos uma breve abordagem às propriedades dos zeros dos polinómios ortogonais.

1. Relação de Recorrência a Três Termos

Seja \mathbb{P} o espaço linear dos polinómios definidos em \mathbb{R} com coeficientes complexos e considere-se a funcional linear u sobre \mathbb{P} definida da seguinte forma

$$u : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle u, P_n(x) \rangle = u_n.$$

Seja (u_n) uma sucessão de números complexos com u definida como anteriormente e tal que $\langle u, x^n \rangle = u_n$ em que $\{x^n\}$ é uma base de \mathbb{P} . Diz-se que (u_n) é uma *sucessão de momentos*.

Consideremos a seguinte definição

DEFINIÇÃO I.1. Dizemos que a sucessão de polinômios $\{p_n\}$ é uma sucessão de polinômios ortogonais associada à funcional de momentos u se

- (1) para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x)$ é um polinômio de grau n ,
- (2) $\langle u, P_m(x)P_n(x) \rangle = k_n \delta_{mn}$, onde $k_n = \langle u, P_n^2 \rangle \neq 0$ para todos os m, n inteiros não negativos e δ_{mn} é o número de Kronecker.

EXEMPLO 1.1 (Polinômios de Tchebychev). Consideremos os polinômios de Tchebychev de primeira espécie que estão definidos da seguinte forma

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad \text{com } n = 0, 1, \dots \text{ e } \theta = \arccos(x).$$

Usando a igualdade trigonométrica

$$\cos[(n+m)\theta] + \cos[(m-n)\theta] = 2\cos(m\theta)\cos(n\theta)$$

obtemos a seguinte relação

$$\int_0^\pi \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } m = n \end{cases}$$

Ou seja, $\cos(m\theta)$, $\cos(n\theta)$ são ortogonais no intervalo $]0, \pi[$. Fazendo a mudança de variável $x = \cos \theta$ no integral anterior obtemos

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 0 \quad \text{para } m \neq n.$$

com $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ para $x \in [-1, 1]$. Portanto a sucessão $\{T_n(x)\}$ é ortogonal relativamente à função peso $\omega(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ou seja, relativamente à funcional $u : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x) = \int_{-1}^1 p(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$.

A sucessão $\{p_n\}$ fica univocamente determinada quando fixamos o coeficiente do termo de maior grau de cada p_n ou quando fixamos a constante k_n , mesmo que tenhamos sucessões diferentes para cada valor de k_n .

Se p_n for mónico, isto é, $p_n = x^n + \dots$, o termo de maior grau tem coeficiente 1, conclui-se portanto que $\{p_n\}$ é uma *sucessão de polinómios ortogonais mónicos* que passaremos a designar por $\{P_n\}$. Se além disso, $\|p_n\| = 1$ obtemos uma *sucessão de polinómios ortonormais*.

Mas nem todas as sucessões de momentos dão origem a sucessões de polinómios ortogonais como veremos no exemplo seguinte

EXEMPLO 1.2. Consideremos a sucessão de momentos $u_n = \langle u, x^n \rangle = a^n$ e $n \geq 0$.

Temos, $P_0(x) = \alpha$ para alguma constante α e $\langle u, \alpha \rangle = \alpha \neq 0$.

Se $P_1(x) = \alpha x + \beta$ e $\langle u, P_0(x)P_1(x) \rangle = \alpha(\beta a + \gamma) = 0$ obtém-se $\gamma = -\beta a$. Assim, conclui-se que

$$\langle u, P_1^2(x) \rangle = \beta^2 a^2 + 2\beta\gamma a + \gamma^2 = 0$$

pelo que não pode existir uma sucessão de polinómios ortogonais para u .

Seja agora H_n o determinante de Hankel de ordem $(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, associado à sucessão dos $(n+1)$ primeiros momentos definido da seguinte forma:

$$H_n = \begin{vmatrix} u_0 & \cdots & u_n \\ u_1 & \cdots & u_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

Definindo

$$(1.1) \quad P_n(x) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & u_{n-2} & \cdots & u_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} H_n^{-1} \quad \text{com} \quad n \geq 1, \quad P_0(x) = 1,$$

obtemos uma sucessão de polinómios $\{P_n\}$ ortogonais em relação a u . Além disso obtém-se

$$\langle u, P_m(x)P_n(x) \rangle = \frac{H_{n+1}(x)}{H_n(x)} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

equação que nos fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma sucessão de polinómios ortogonais. Tem-se designadamente:

TEOREMA 1.1. *Seja u uma funcional de momentos com sucessão de momentos (u_n) . Existe uma sucessão de polinômios ortogonais associada a u se, e somente se, $H_n \neq 0$ com $n = 0, 1, \dots$ e vem dada, a menos de uma constante, por (1.1).*

Daqui resulta que

TEOREMA 1.2. *A funcional u diz-se regular ou quase-definida quando estiver associada a uma sucessão de polinômios ortogonais mônicos, ou quando $H_n \neq 0$. A funcional u_n é definida positiva se e somente se os momentos são todos reais e $H_n > 0$. Neste caso $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinômios ortogonais reais.*

Outro resultado importante relativo às sucessões de polinômios ortogonais é o seguinte:

TEOREMA 1.3. *Seja u uma funcional de momentos e $\{p_n\}$ uma sucessão de polinômios. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $\{p_n\}$ é uma sucessão de polinômios ortogonais em relação a u ,
- (2) $\langle u, x^n p_n \rangle = k_n \delta_{m,n}$ com $k_n \neq 0$ e $0 \leq m \leq n-1$,
- (3) se π é um polinômio de grau menor que n e π não é identicamente nulo, então $\langle u, \pi p_n \rangle = 0$ e $\langle u, \pi(x) p_n \rangle \neq 0$ se $m = n$.

As famílias de polinômios ortogonais $\{P_n\}$ podem representar-se de variadas formas entre elas através da relação de recorrência a três termos como veremos a seguir.

Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinômios ortogonais relativamente a u , sendo u uma funcional quase-definida. Quaisquer três elementos consecutivos de $\{P_n\}$, sucessão de polinômios de grau n , satisfazem uma relação da forma

$$(1.2) \quad P_n(x) = (A_n x + B_n) P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

onde $A_n \neq 0$, B_n e C_n designam constantes reais ou complexas. Além disso, caso $\{P_n\}$ seja uma sucessão de polinômios ortogonais mônica em relação à funcional quase-definida u então $\{P_n\}$ também satisfaz uma relação de recorrência do tipo

$$(1.3) \quad P_n(x) = (x - \beta_n) P_{n-1}(x) - \gamma_n P_{n-2}(x),$$

para $n \in \mathbb{N}$, e $P_{-1}(x) = 0$, onde β_n, γ_n são constantes e $\gamma_n \neq 0$. Mais, se u for definida-positiva então β_n é real e $\gamma_{n+1} > 0$ para $n \geq 1$, sendo γ_1 arbitrário.

Um dos resultados mais importantes, neste contexto, deve-se a Favard, em 1935, e afirma que qualquer sucessão de polinômios que satisfaça uma relação de recorrência da forma (1.3) é uma sucessão de polinômios ortogonais. Concretamente tem-se

TEOREMA 1.4 (Favard, 1935). *Sejam $(\beta_n), (\lambda_n)$ sucessões de números complexos e (P_n) uma sucessão de polinômios definida pela relação de recorrência*

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2}, \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1.$$

Então existe uma funcional de momentos relativamente à qual $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinômios ortogonais mónicos, ou seja, uma sucessão de polinômios que verificam $\langle u, 1 \rangle = \lambda_1$, e $\langle u, P_m P_n \rangle = \lambda_1 \dots \lambda_{n+1} \delta_{m,n}$. Além disso, a funcional linear verifica

- *u é quase-definida se e somente se $\lambda_n \neq 0$,*
- *u é definida-positiva se e somente se $(\beta_n) \subseteq \mathbb{R}$ e $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ com $n \in \mathbb{N}$.*

A demonstração que apresentaremos deve-se a Pollaczek em [26].

Demonstração: Sejam P_0, P_1, \dots uma sucessão de polinômios em x , definidos pela relação de recorrência (1.2). Vamos provar que $\{P_n\}$ é ortogonal. Consideremos as potências $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ que se exprimem como combinação linear dos coeficientes $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}$, que dependem dos A_i, B_i, C_i , e pelos produtos

$$(1.4) \quad P_\nu(x) P_{\nu+1}(x) \quad \text{com } \nu = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

$$(1.5) \quad P_\nu(x) P_{\nu+2}(x) \quad \text{com } \nu = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] - 1$$

ou seja, tem-se a família de relações

$$(1.6) \quad x^n = a_n + \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} b_{n\nu} P_\nu P_{\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2} \right] - 1} c_{n\nu} P_\nu P_{\nu+2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Os produtos $P_m P_n$ onde $m \neq n$ exprimem-se linearmente recorrendo apenas aos produtos (1.4) e (1.5), logo

$$(1.7) \quad P_m(x) P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m+n-1}{2}\right]} b'_{m+n,\nu} P_\nu P_{\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} c'_{m+n,\nu} P_\nu P_{\nu+2},$$

com $m \neq n$ e $m, n = 0, 1, \dots$

Defina-se uma funcional linear u de modo que

$$(1.8) \quad \langle u, 1 \rangle = 1,$$

$$(1.9) \quad \langle u, P_\nu P_{\nu+1} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle u, P_\nu P_{\nu+2} \rangle = 0 \quad \text{para} \quad \nu = 0, 1, \dots$$

Vamos mostrar que $\{P_n\}$ é ortogonal relativamente a esta funcional. Aplicando u em (1.6) e usando os resultados (1.8) e (1.9) temos $\langle u, x^n \rangle = u_n$ ou seja, u é a funcional de momentos, de modo que para qualquer polinómio P_n , $\langle u, P(x) \rangle$ está bem determinada. De modo análogo, aplicando u à igualdade (1.8) e usando (1.9) resulta que

$$(1.10) \quad \langle u, P_m P_n \rangle \equiv 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

Assim concluímos que $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a u .

Reciprocamente, temos que a sucessão de polinómios ortogonais $\{P_n\}$ verifica uma relação de recorrência a três termos da forma (1.2), desde que o operador u definido por (1.8) e (1.9) seja tal que, segundo a definição (1.1), possa estar definida a relação $\langle u, P_n^2 \rangle \neq 0$, com $n = 1, 2, \dots$ ■

2. Função Geradora

A expressão da função geradora é muito importante no estudo dos polinómios ortogonais uma vez dada uma sucessão qualquer podemos usá-la para conhecer todos os polinómios que lhe correspondem.

DEFINIÇÃO I.2. Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios. A *função geradora* da sucessão $\{P_n\}$ é designada por $g(x, z)$ e tem a seguinte expressão

$$g(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

Todos os elementos desta sucessão podem ser obtidos aplicando o integral de Cauchy à expressão anterior, ou seja, resolvendo

$$\frac{P_n(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(x, z)}{z^{n+1}} dz$$

para $n = 0, 1, \dots$ e tendo sempre em conta a região de convergência onde a função geradora está definida.

A região de convergência pode ser determinada, na maioria dos casos, aplicando os critérios da razão ou da raiz a $\{P_n\}$, ou seja, calculando $\lim \sqrt[n]{|u_n|} = r < \infty$. Quando $|x| > r$ temos

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}}$$

convergente em C , círculo de centro na origem e raio r , e daqui resulta que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C x^n S(x) dx = \langle u, x^n \rangle, \quad n = 0, 1, \dots$$

Para um polinómio $P(x)$ temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C P(x) S(x) dx = \langle u, P(x) \rangle$$

e pela definição de ortogonalidade temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C P_n(x) P_m(x) S(x) dx = \delta_{m,n} \langle u, P_n^2(x) \rangle, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

ou seja os polinómios $P_n(x)$ têm medida ortogonal $S(x)$ em C .

De seguida faremos um resumo relativamente à convergência pontual e uniforme de sucessões de funções.

Consideremos f_n uma sucessão de funções definidas num conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ e suponhamos que para cada $x \in E$ a sucessão de números f_n converge, ou seja, definimos uma função como $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Dizemos então que f_n converge *pontualmente* para f em E .

Um critério de convergência mais exigente é o conceito de convergência uniforme. Dizemos que a sucessão de funções f_n , $n = 1, 2, \dots$ converge uniformemente em E para uma função f se para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que para todo $n \geq N$ se tem $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo o $x \in E$. É portanto imediato que toda a sucessão que é uniformemente convergente também é pontualmente convergente.

Relativamente à região de convergência uniforme, esta poderá ser encontrada através dos seguintes resultados:

TEOREMA 2.1 (Critério de Cauchy). *A sucessão de funções $\{f_n\}$, definida em E , converge uniformemente em E se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que, para todo o $m, n \geq N$, e para todo $x \in E$ temos $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.*

Ou utilizando um critério mais geral:

TEOREMA 2.2. *Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Se*

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

então $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ uniformemente em E se e somente se M_n tende para 0 quando $n \rightarrow \infty$.

No que diz respeito à integração e diferenciação de sucessões e séries de funções que convergem uniformemente, a questão principal consiste em saber se é possível efectuar estas operações termo a termo.

Quanto à diferenciação a convergência uniforme de f_n não nos garante a convergência uniforme da sucessão f'_n . São necessárias hipóteses mais fortes para que $f'_n \rightarrow f'$ quando $f_n \rightarrow f$, como veremos no resultado seguinte:

TEOREMA 2.3. *Suponhamos que f_n é uma sucessão de funções diferenciáveis em $[a, b]$ e tal que $\{f_n(x_0)\}$ converge para algum ponto x_0 em $[a, b]$. Se f'_n converge uniformemente em $[a, b]$, então $\{f_n\}$ converge uniformemente em $[a, b]$, para uma função f , e tem-se $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ ($a \leq x \leq b$).*

Relativamente à integração temos o seguinte resultado

TEOREMA 2.4. *Suponhamos que $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ são funções contínuas, tais que, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ uniformemente em $[a, b]$. Então,*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Podemos imediatamente estabelecer um resultado útil no caso em que temos funções dadas por uma série.

COROLÁRIO 2.1. *Supondo que $g_n \in C([a, b])$ são contínuas e a série*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

converge uniformemente em $[a, b]$, então

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x)dx.$$

Por outras palavras, a série pode ser integrada termo a termo.

Como exemplo vamos ver o que se passa com os polinómios de Hermite:

EXEMPLO 2.1. Utilizaremos o critério da razão para encontrar a região de convergência dos polinómios de Hermite. Sejam x, z tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{H_{n+1}(x) \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{H_n(x) \frac{z^n}{n!}} \right| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{H_{n+1}(x)}{H_n(x)} \right| \frac{|z|}{n+1} < 1.$$

Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$. Vamos estudar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{H_{n+1}(x)}{H_n(x)} \right|.$$

Os polinómios de Hermite estão definidos pela seguinte relação de recorrência:

$$xH_n = H_{n+1} - \frac{n}{2}H_{n-1} \Leftrightarrow x = \frac{H_{n+1}}{H_n} - \frac{n}{2} \frac{H_{n-1}}{H_n} \Leftrightarrow \frac{x}{n} - \frac{1}{n} \frac{H_{n+1}}{H_n} = -\frac{1}{2} \frac{H_{n-1}}{H_n}$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{n} + \frac{1}{n} \frac{H_{n+1}}{H_n} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{H_{n-1}}$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{H_{n-1}} = \infty$ temos

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{x}{n}}_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{H_{n+1}}{H_n} = 0 \quad \text{pelo que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{H_{n+1}}{H_n} = 0$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{H_{n+1}(x)}{H_n(x)} \right| \frac{|z|}{n+1} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1,$$

é uma condição verdadeira. Concluimos assim que a função geradora é convergente para todo o \mathbb{R} .

3. Teorema de Poincaré

Para garantir a existência de região de convergência temos o seguinte resultado que se deve a Poincaré [25].

Consideremos uma relação de recorrência definida da seguinte forma:

$$(3.1) \quad p_0(n, x) u_{n+k}(x) + p_1(n, x) u_{n+k-1}(x) + \dots + p_{k-1}(n, x) u_{n+1}(x) + p_k(n, x) u_n(x) = 0$$

onde os p_k são polinômios, não obrigatoriamente todos do mesmo grau, e os $u_n(x)$ são funções quaisquer, podendo mesmo ser funções vectoriais de n variáveis reais ou complexas.

Estas expressões podem ser relacionadas com os polinômios ortogonais através da função geradora correspondente, tendo sempre em conta a região de convergência. Para garantir a convergência da função geradora temos o seguinte resultado devido a Poincaré [25]:

TEOREMA 3.1 (Poincaré). *Seja $\{u_n\}$ uma solução de uma relação de recorrência de ordem m , dada por*

$$\sum_{k=0}^m c_k(n) u_{n-k} = 0$$

onde $c_i(n)$, $i = 0, \dots, m$ são tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_i(n) = c_i$. Sejam ξ os zeros do polinômio característico associado a (3.1) e suponhamos que $|\xi_i| \neq |\xi_j|$ para $i \neq j$ então existe ξ_k tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \xi_k$$

Este valor ξ_k é o zero de maior valor absoluto da equação característica correspondente à recorrência.

Demonstração: Para determinar a equação característica começamos por considerar a recorrência (3.1) com $p_0(n, x) \neq 0$. Divida-se esta expressão por $p_0(n, x)$ de forma a obter

$$u_{n+k}(x) + \frac{p_1(n, x)}{p_0(n, x)} u_{n+k-1}(x) + \dots + \frac{p_{k-1}(n, x)}{p_0(n, x)} u_{n+1}(x) + \frac{p_k(n, x)}{p_0(n, x)} u_n(x) = 0.$$

Fazendo

$$Q_i = \frac{p_i(n, x)}{p_0(n, x)}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

temos que

$$(3.2) \quad u_{n+k} + Q_1 u_{n+k-1} + \dots + Q_{k-1} u_{n+1} + Q_k u_n = 0$$

pelo que os coeficientes B_i da equação característica obtêm-se calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_i$ e a equação característica toma a forma seguinte

$$\varphi(z) = z^k + B_1 z^{k-1} + \dots + B_{k-1} z + B_k = 0.$$

Assim α é o zero de maior valor absoluto desta equação sendo, em geral, todos estes zeros distintos. Concentrar-nos-emos nas *equações de ordem 3*, para as quais a equação (3.1) assume a forma:

$$p_0(n, x) u_{n+3}(x) + p_1(n, x) u_{n+2}(x) + p_2(n, x) u_{n+1}(x) + p_3(n, x) u_n(x) = 0,$$

onde $p_0(n, x) \neq 0$ e $p_j(n, x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, são polinómios de grau p em n . Dividindo tudo por $p_0(n, x)$ obtemos

$$u_{n+3}(x) + Q_1(n, x) u_{n+2}(x) + Q_2(n, x) u_{n+1}(x) + Q_3(n, x) u_n(x) = 0.$$

Fazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_i = B_i$ obtemos a seguinte equação característica

$$(3.3) \quad \varphi(z) = z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3 = 0.$$

Queremos mostrar que a relação $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende, quando n cresce indefinidamente, para um dos zeros da equação característica, que é aquele que tem maior valor absoluto. Sejam α, β, γ os zeros da equação característica (3.3). Consideremos dois casos

Primeiro caso: vamos supor que os zeros α , β , γ são todos distintos e que $|\alpha| > |\beta| > |\gamma|$. Mostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha.$$

Começamos por considerar as relações

$$(3.4) \quad u_n = X_n + Y_n + Z_n,$$

$$(3.5) \quad u_{n+1} = \alpha X_n + \beta Y_n + \gamma Z_n,$$

$$(3.6) \quad u_{n+2} = \alpha^2 X_n + \beta^2 Y_n + \gamma^2 Z_n.$$

Vamos resolver estas equações em ordem a X_n , Y_n e Z_n usando a Regra de Cramer: $\delta = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma) \neq 0$, visto que α , β , γ são distintos. Podemos considerar também as relações

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= X_{n+1} + Y_{n+1} + Z_{n+1}, \\ u_{n+2} &= \alpha X_{n+2} + \beta Y_{n+2} + \gamma Z_{n+2}, \\ u_{n+3} &= \alpha^2 X_{n+3} + \beta^2 Y_{n+3} + \gamma^2 Z_{n+3}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo podemos calcular o valor de X_{n+1} pois o determinante da matriz dos coeficientes deste sistema de equações é $\delta \neq 0$. Logo, novamente pela Regra de Cramer temos

$$\delta X_{n+1} = \begin{vmatrix} u_{n+1} & 1 & 1 \\ u_{n+2} & \beta & \gamma \\ u_{n+3} & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}.$$

por (3.5) e por (3.6) e atendendo à multilinearidade do determinante resulta que

$$(3.7) \quad \delta X_{n+1} = \alpha X_n \delta + (\gamma - \beta) (u_{n+3} - \alpha^3 X_n - \beta^3 Y_n - \gamma^3 Z_n).$$

Do mesmo modo obtemos

$$\begin{aligned} \delta Y_{n+1} &= \beta Y_n \delta + (\alpha - \gamma) (u_{n+3} - \alpha^3 X_n - \beta^3 Y_n - \gamma^3 Z_n) \\ \delta Z_{n+1} &= \gamma Z_n \delta + (\beta - \alpha) (u_{n+3} - \alpha^3 X_n - \beta^3 Y_n - \gamma^3 Z_n). \end{aligned}$$

Como

$$u_{n+3}(x) = -Q_1(n, x) u_{n+2}(x) - Q_2(n, x) u_{n+1}(x) - Q_3(n, x) u_n(x)$$

e atendendo a (3.4), (3.5) e (3.6) temos

$$(3.8) \quad u_{n+3} - \alpha^3 X_n - \beta^3 Y_n - \gamma^3 Z_n = -(\varphi_n(\alpha) X_n + \varphi_n(\beta) Y_n + \varphi_n(\gamma) Z_n).$$

e substituindo (3.8) em (3.7) obtemos

$$X_{n+1} = \alpha X_n - \frac{(\gamma - \beta)}{\delta} (\varphi_n(\alpha) X_n + \varphi_n(\beta) Y_n + \varphi_n(\gamma) Z_n)$$

e procedendo de modo análogo estabelecemos também

$$Y_{n+1} = \beta Y_n - \frac{(\alpha - \gamma)}{\delta} (\varphi_n(\alpha) X_n + \varphi_n(\beta) Y_n + \varphi_n(\gamma) Z_n)$$

$$Z_{n+1} = \gamma Z_n - \frac{(\beta - \alpha)}{\delta} (\varphi_n(\alpha) X_n + \varphi_n(\beta) Y_n + \varphi_n(\gamma) Z_n).$$

Definindo agora

$$\lambda = \frac{\gamma - \beta}{\delta}, \quad \mu = \frac{\alpha - \gamma}{\delta} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{\beta - \alpha}{\delta}$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}} &= \frac{\beta \frac{Y_n}{X_n} - \mu \left(\varphi_n(\alpha) + \varphi_n(\beta) \frac{Y_n}{X_n} + \varphi_n(\gamma) \frac{Z_n}{X_n} \right)}{\alpha - \lambda \left(\varphi_n(\alpha) + \varphi_n(\beta) \frac{Y_n}{X_n} + \varphi_n(\gamma) \frac{Z_n}{X_n} \right)} \\ \frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}} &= \frac{\gamma \frac{Z_n}{X_n} - \nu \left(\varphi_n(\alpha) + \varphi_n(\beta) \frac{Y_n}{X_n} + \varphi_n(\gamma) \frac{Z_n}{X_n} \right)}{\alpha - \lambda \left(\varphi_n(\alpha) + \varphi_n(\beta) \frac{Y_n}{X_n} + \varphi_n(\gamma) \frac{Z_n}{X_n} \right)}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\left| \frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}} \right| < \frac{|\beta| \left| \frac{Y_n}{X_n} \right| - |\mu| \left(|\varphi_n(\alpha)| + |\varphi_n(\beta)| \left| \frac{Y_n}{X_n} \right| + |\varphi_n(\gamma)| \left| \frac{Z_n}{X_n} \right| \right)}{|\alpha| - |\lambda| \left(|\varphi_n(\alpha)| + |\varphi_n(\beta)| \left| \frac{Y_n}{X_n} \right| + |\varphi_n(\gamma)| \left| \frac{Z_n}{X_n} \right| \right)}$$

e

$$\left| \frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}} \right| < \frac{|\gamma| \left| \frac{Z_n}{X_n} \right| - |\nu| \left(|\varphi_n(\alpha)| + |\varphi_n(\beta)| \left| \frac{Y_n}{X_n} \right| + |\varphi_n(\gamma)| \left| \frac{Z_n}{X_n} \right| \right)}{|\alpha| - |\lambda| \left(|\varphi_n(\alpha)| + |\varphi_n(\beta)| \left| \frac{Y_n}{X_n} \right| + |\varphi_n(\gamma)| \left| \frac{Z_n}{X_n} \right| \right)}.$$

Designemos por F_n o maior dos módulos $\left| \frac{Y_n}{X_n} \right|$ e $\left| \frac{Z_n}{X_n} \right|$. Podem suceder dois casos:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \text{número finito}$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \infty$.

No primeiro caso supomos que F_n não aumenta indefinidamente, então F_n terá limite ω finito. Consideremos um número ω' satisfazendo a desigualdade

$$(3.9) \quad \omega < \omega' < \frac{\omega}{k} \quad \text{onde } k \text{ é tal que } \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < k < 1.$$

Vamos considerar uma subsucessão $\{n_p\}$ tal que $F_{n_p} \rightarrow \omega$. Logo para um p suficientemente grande temos $H_{n_p} < \omega'$ e como consequência

$$\left| \frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}} \right| < \frac{|\beta| \omega' - |\mu| (|\varphi_n(\alpha)| + |\varphi_n(\beta)| \omega' + |\varphi_n(\gamma)| \omega')}{|\alpha| - |\lambda| (|\varphi_n(\alpha)| + |\varphi_n(\beta)| \omega' + |\varphi_n(\gamma)| \omega')}.$$

Atendendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\alpha) = \varphi(\alpha) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\beta) = \varphi(\beta) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\gamma) = \varphi(\gamma) = 0$$

verifica-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|\varphi_n(\alpha)| + |\varphi_n(\beta)| + |\varphi_n(\gamma)|) = 0.$$

Da desigualdade (3.9) vem $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \omega' < k \omega'$ quando $n \rightarrow \infty$. E assim $n_p > N$ donde resulta que $\left| \frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}} \right| < k \omega' < \omega$. Do mesmo modo obtemos que $\left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| \omega' < k \omega'$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\left| \frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}} \right| < k \omega' < \omega$ com $n_p > N$, ou seja, $F_{n_p+1} < k \omega' < \omega$.

Repetindo o raciocínio até obtermos $n > N$ teremos $F_n < k \omega' < \omega$ o que é uma contradição uma vez que por hipótese ω é um ponto limite. Estabelece-se uma impossibilidade de escolher ω' de tal modo que $\omega < \omega' < \frac{\omega}{k}$, ou seja, H_n tem como único limite $\omega = 0$. Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Y_n}{X_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_n}{X_n} \right| = 0.$$

Nestas condições obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \beta \frac{Y_n}{X_n} + \gamma \frac{Z_n}{X_n}}{1 + \frac{Y_n}{X_n} + \frac{Z_n}{X_n}} = \alpha.$$

Supondo agora que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \infty$. Isto significa que α não é a raiz de maior módulo pela inequação

$$\frac{Z_{n+1}}{Y_{n+1}} < \frac{\gamma \frac{Z_n}{Y_n} - \nu \left(\varphi_n(\alpha) \frac{X_n}{Y_n} + \varphi_n(\beta) + \varphi_n(\gamma) \frac{Z_n}{Y_n} \right)}{\beta - \mu \left(\varphi_n(\alpha) \frac{X_n}{Y_n} + \varphi_n(\beta) + \varphi_n(\gamma) \frac{Z_n}{Y_n} \right)}.$$

consideremos $F'_n = \left| \frac{Z_n}{Y_n} \right|$ obtemos novamente duas possibilidades:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n = \infty$$

Para a primeira possibilidade o raciocínio é análogo ao que usámos anteriormente e resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_n}{Y_n} \right| = 0$ pelo que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha \frac{X_n}{Z_n} + \beta + \gamma \frac{Z_n}{Y_n}}{\frac{X_n}{Y_n} + 1 + \frac{Z_n}{Y_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$$

onde β é o zero de maior módulo. Para a segunda possibilidade temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n = \infty$ e então

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha \frac{X_n}{Z_n} + \beta \frac{Y_n}{Z_n} + \gamma}{\frac{X_n}{Y_n} + \frac{Y_n}{Z_n} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$$

onde γ é o zero de maior módulo.

Segundo caso: - A equação característica (3.3) tem dois zeros iguais α e β verificando $\alpha = \beta \neq \gamma$ e $|\alpha| = |\beta| > |\gamma|$.

Neste caso fazemos uma transformação um pouco diferente da considerada para o caso geral:

$$\begin{aligned} u_n &= X_n + Y_n + Z_n \\ u_{n+1} &= \alpha \left(1 + \frac{1}{n} \right) X_n + \alpha Y_n + \gamma Z_n \\ u_{n+2} &= \alpha^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right) X_n + \alpha^2 Y_n + \gamma^2 Z_n \end{aligned}$$

O determinante da matriz do sistema é $\delta = -\frac{\alpha}{n} (\alpha - \gamma)^2 \neq 0$. De modo análogo ao utilizado para o caso geral obtemos que se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{X_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{Y_n} = 0$$

então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha = \beta$. Por outro lado se $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \infty$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \gamma$ pois nesta situação γ é o zero de maior módulo da equação característica. ■

Vamos agora considerar o caso em que os coeficientes da relação de recorrência (3.1) são polinómios que não têm todos o mesmo grau.

Para que as fracções Q_i , $i = 0, \dots, k-1$ tendam para limites finitos temos de efectuar a seguinte transformação $u_n(x) = (n!)^\mu v_n(x)$ onde μ é uma constante real.

A recorrência (3.2) tomará a seguinte forma

$$(3.10) \quad v_{n+k} + \frac{Q_{k-1}}{(n+k)^\mu} v_{n+k-1} + \dots + \frac{Q_0}{(n+k)^\mu (n+k-1)^\mu \dots n^\mu} = 0.$$

Escolhemos a constante μ de tal modo que os novos coeficientes

$$(3.11) \quad \frac{((n+i)!)^\mu}{((n+k)!)^\mu} Q_i$$

não aumentem indefinidamente e pelo menos um entre eles não convirja para zero.

Se, na relação de recorrência (3.1) suposermos que cada um dos coeficientes P_i tem grau p_i , $i = 0, \dots, k-1$ então $Q_i = \frac{P_i(n)}{P_k(n)}$ tem grau $(p_i - p_k)$.

Como $\frac{(n+i)!}{(n+k)!}$ é um polinómio em n de ordem $(i-k)$ então a expressão (3.11) tem grau

$$(3.12) \quad p_i - p_k + (i-k)\mu, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Escolhe-se o número μ de modo que (3.12) seja negativo ou nulo, portanto obtém-se $\frac{p_i - p_k}{i-k} \geq -\mu$ e a igualdade verifica-se pelo menos para um i .

A equação (3.10) tem a equação característica $\psi(z) \equiv z^k + c_{k-1}z^{k-1} + \dots + c_1z + c_0 = 0$ onde os coeficientes são finitos e não todos nulos. Em geral, esta equação terá zeros com módulos todos distintos pelo que aplicando o Teorema de Poincaré temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \alpha,$$

e α é o zero de maior valor absoluto. Nestas condições $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n^\mu \frac{v_{n+1}}{v_n}$ e concluimos que

$$(1) \text{ Se } \mu > 0 \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty,$$

$$(2) \text{ Se } \mu < 0 \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

Este resultado mantêm-se mesmo quando os coeficientes da relação de recorrência são polinómios que dependem de um parâmetro x , isto é, quando a relação de recorrência é da forma

$$P_3(n, x)R_{n+3}(x) + P_2(n, x)R_{n+2}(x) + P_1(n, x)R_{n+1}(x) + P_0(n, x)R_n(x) = 0,$$

onde $R_n(x) = u_n$.

Quanto à região de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R_n(x)$, onde $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots$ são dados e pelo Teorema de Poincaré, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{n+1}}{R_n} = \alpha(x),$$

onde $\alpha(x)$ é o zero de maior valor absoluto da equação característica

$$\phi(z) \equiv A_3(x)z^3 + A_2(x)z^2 + A_1(x)z + A_0(x) = 0$$

em que $A_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_i(n, x)}{P_k(n, x)}$ e $P_k(n, x)$ é o coeficiente do termo de maior grau.

Fazendo $\frac{1}{\rho} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|}$ verificamos que a série converge quando $|\alpha(x)| < \rho$ e diverge quando $|\alpha(x)| > \rho$.

Vamos aplicar o que acabámos de apresentar aos polinómios de Hermite:

EXEMPLO 3.1. Estes polinómios têm a seguinte relação de recorrência a três termos

$$(3.13) \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Efectuando a mudança de variável $H_n = (n!)^\mu P_n$ na equação anterior obtemos

$$(n+1)^\mu n^\mu P_{n+1} = 2xn^\mu P_n - 2nP_{n-1}.$$

Para determinar μ utilizamos a expressão (3.12). Temos concretamente $\frac{0-1}{0+1} \geq -\mu$, de onde resulta $\mu \geq 1$. Logo o menor valor que μ pode tomar é 1 e a relação (3.13) toma a forma

$$(3.14) \quad (n+1)nP_{n+1} = 2xnP_n - 2nP_{n-1}.$$

A equação característica de (3.14) é $\phi(r) = r^2 - 2xr + 2$ e os seus zeros são $r = x \pm \sqrt{x^2 - 2}$.

Pelo teorema de Poincaré temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{n+1}(x)}{H_n(x)} = |x + \sqrt{x^2 - 2}|$$

raiz, de maior valor absoluto, da equação característica.

Para determinar a região de convergência resolvemos $\frac{1}{\rho} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\alpha_n n!}$ de forma a obter o raio de convergência. Conclui-se que a região de convergência é limitada pela curva $r = x + \sqrt{x^2 - 2}$.

Obtém-se pois que a equação $x = \frac{r}{2} + \frac{1}{r}$ para a curva referida pode ser reescrita fazendo $z = \rho e^{i\theta}$. Tem-se então

$$x = \left(\frac{\rho}{2} + \frac{1}{\rho}\right) \cos \theta + i \left(\frac{\rho}{2} - \frac{1}{\rho}\right) \sin \theta.$$

Escrevendo $x = X + Yi$ conclui-se que $X = \left(\frac{\rho}{2} + \frac{1}{\rho}\right) \cos \theta$, e que $Y = \left(\frac{\rho}{2} - \frac{1}{\rho}\right) \sin \theta$, o que nos permite concluir que a região de convergência é uma elipse.

4. Zeros de polinómios ortogonais

Uma propriedade importante dos polinómios ortogonais é o comportamento dos seus zeros. Consideremos uma sucessão de polinómios ortogonais reais mónicos P_n e uma funcional definida-positiva u . Suponhamos que sucessão $\{P_n\}$ é tal que verifica a seguinte relação de recorrência

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1} - \gamma_n P_{n-2} \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1 \quad n = 1, 2, \dots$$

em que $(\beta_n) \subseteq \mathbb{R}$ e $(\gamma_n) \subseteq \mathbb{R}^+$. Temos a seguinte caracterização para os zeros de $\{p_n\}$:

TEOREMA 4.1. *Seja $\{p_n\}$ a sucessão de polinómios ortonormais associada à medida de Borel positiva ω . Então*

- (1) *os zeros de p_n são reais e simples,*
- (2) *Se o suporte da medida ω está contido no intervalo $[a, b]$ então os zeros de p_n encontram-se nesse intervalo.*

O resultado seguinte afirma que os zeros de dois polinómios consecutivos de uma dada sucessão de polinómios ortogonais mónicos estão entrelaçados.

TEOREMA 4.2. *Os zeros de quaisquer dois polinómios consecutivos P_n e P_{n+1} estão entrelaçados, isto é,*

$$x_{n+1,j} < x_{n,j} < x_{n+1,j+1} \quad j = 1, 2, \dots$$

As sucessões de polinómios ortogonais podem ser caracterizadas completamente através do seguinte resultado

TEOREMA 4.3 (Wendroff). *Dados os números reais $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, para cada conjunto da forma y_1, y_2, \dots, y_{n-1} onde $x_{k-1} < y_{k-1} < x_k$, $2 \leq k \leq n$, existe uma sucessão de polinómios ortogonais em $[a, b]$, $\{P_n\}$ talque*

$$P_{k-1}(x) = (x - y_1) \dots (x - y_{k-1}) \quad e \quad P_k = (x - x_1) \dots (x - x_k).$$

Para o caso geral em que as sucessões de polinómios ortogonais não necessariamente reais temos ainda o seguinte resultado

TEOREMA 4.4 (Saff). *Se P_n é uma sucessão de polinómios ortogonais associada à medida de Borel positiva μ com suporte em \mathbb{C} , os zeros de P_n estão no invólucro convexo de μ , $C_o(\text{supp}\mu)$.*

5. O que foi feito por Hahn

Nesta secção iremos abordar o processo elaborado por Hahn em [17].

Neste trabalho Hahn diz que a ordem mínima das equações diferenciais para os polinómios ortogonais apenas tomam valores quatro ou dois. Para o caso da ordem ser quatro as soluções podem ser construídas por meio das soluções das equações diferenciais de ordem dois. Também são dadas condições necessárias para os parâmetros que surgem no caso de ordem dois.

Começa por considerar a relação de recorrência a três termos

$$(5.1) \quad y_n(x) = (x - a_n)y_{n-1}(x) - b_n y_{n-2}(x)$$

e a equação diferencial de ordem dois com coeficientes polinomiais

$$(5.2) \quad p_{n_0}(x)y_n''(x) + P_{n_1}(x)y_n'(x) + p_{n_2}(x)y_n(x) = 0.$$

Pelo teorema de Favard temos que se a_n real e b_n positivo, a sucessão $\{y_n\}$ está definida pela relação de recorrência 5.1 se e somente se $\{y_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais.

Seja $\alpha = \alpha_0, \alpha_0 + 1, \alpha_0 + 2, \dots$ uma sucessão de números reais ou complexos. Para cada valor de $\alpha \geq \alpha_0$ existe a equação diferencial de ordem k

$$(5.3) \quad L_\alpha := p_{\alpha_0} y^{(k)} + p_{\alpha_1} y^{(k-1)} + \dots + p_{\alpha_k} y = 0.$$

Os polinómios p_{n_j} , $j = 0, \dots, k$ têm graus uniformemente limitados com respeito a α e o coeficiente de maior grau de $p_{\alpha_0} = 1$.

Os polinómios $y_\alpha(x)$ não satisfaz uma equação diferencial linear com coeficientes polinomiais onde a ordem seja menor que k e as equações $L_\alpha(y) = 0$, $L_\alpha - 2(y) = 0$ não têm soluções em comum. Então temos o seguinte resultado

TEOREMA 5.1. *Verificam-se as seguintes afirmações:*

- (1) *as singularidades de $L_\alpha(y)$ não dependem de α ;*
- (2) *se a variável x move-se ao longo de uma curva fechada em torno da singularidade, a substituição que transforma o sistema fundamental é independente de α ;*
- (3) *é possível, para cada valor de α escolher o sistema fundamental de 5.3 com funções convenientes que satisfaçam a relação de recorrência 5.1.*

CAPÍTULO II

Polinómios Ortogonais Tipo Pollaczek

Iniciaremos este capítulo com um resumo da teoria geral das equações diferenciais, nomeadamente, equação de Gauss, Teorema de Fuchs e método de Laplace. Esta teoria irá permitir-nos encontrar a expressão da função geradora das sucessões de polinómios ortogonais, quando esta é dada por uma equação diferencial que a relação de recorrência a três termos verifica e respectiva medida de ortogonalidade.

De seguida, descreveremos o método que Pollaczek desenvolveu, em [26], para encontrar a expressão da função geradora obtida através da resolução da equação diferencial referida anteriormente.

Como exemplos teremos os polinómios clássicos onde mostraremos que são do tipo Pollaczek e a partir da sua correspondente equação diferencial encontraremos a expressão da função geradora.

Previamente introduziremos os polinómios ortogonais associados e naturalmente iremos referir o teorema de Markov tendo já sido definida a transformada de Stieltjes e apresentando a demonstração deste teorema como fez Pollaczek em [26], ou seja, estabelecemos uma relação entre medidas de ortogonalidade complexas e sucessões de polinómios ortogonais.

1. Teoria Geral das Equações Diferenciais

Consideremos o seguinte sistema escalar linear

$$\frac{\partial y^j}{\partial x} = \sum_{k=0}^n a_k^j(x) y^k, \quad j = 1, \dots, n \quad \text{com} \quad a_k^j \quad \text{funções contínuas.}$$

Daqui resulta que uma condição necessária e suficiente para que o sistema anterior seja *singular regular* na origem é que, se sobre um disco fechado centrado na origem e de raio r , onde os $a_k^j(x)$ são holomorfos, excepto na origem, este círculo está cortado

segundo o segmento $[0, r]$, tomando um ramo de qualquer uma das soluções μ , então existem dois números N e L tais que

$$|\mu(x)| < N|x|^{-L}$$

para $|x| \leq R$. Isto significa que, para que um sistema seja singular regular na origem é necessário que $a_k^j(x)$ tenham um polo na origem ou que $a_k^j(x)$ sejam holomorfas.

Daqui resulta um caso particular importante:

TEOREMA 1.1 (Fuchs). *A condição necessária e suficiente para que a equação escalar*

$$(1.1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

tenha um ponto singular-regular em $x_0 \neq \infty$ é que as funções $a_h(x)$ com $h = 1, \dots, n$ admitam nesse ponto um polo de multiplicidade h .

Para simplificar a notação iremos considerar que $x_0 = 0$ e que a_h são uniformes numa vizinhança da origem.

O sistema fundamental de soluções de (1.1) tem a forma

$$y_{\lambda, \mu}(x) = (x^r)' \left[\eta_{\lambda, \mu}(x) + \dots + P_{k-1} \left(\frac{\log x}{2\pi i} \right) \eta_{\lambda, 1}(x) \right]$$

com $\mu = 1, \dots, n_\lambda$, $\lambda = 1, \dots, \alpha$ e $n_1 + \dots + n_\alpha = n$ e onde $\eta_{\lambda, \mu}(x)$ são holomorfas sobre um disco fechado de raio r centrado na origem.

Podemos reescrever a equação (1.1) da seguinte forma

$$(1.2) \quad y^{(n)} x^n + y^{(n-1)} x^{n-1} A_1(x) + \dots + y' x A_{n-1}(x) + y A_n(x) = 0$$

que é uma equação regular singular na origem e $A_h = c_h + c'_h x + \dots$

No subsistema de soluções, y tem a seguinte forma

$$y = x^r \eta(x) = d_0 x^r + d_1 x^{r+1} + \dots$$

Vamos encontrar os números r e os coeficientes d_0, d_1, \dots de modo a satisfazerem (1.2). No primeiro membro temos um produto de x^r por uma série inteira e considerando o termo de x^r nulo encontramos a condição

$$(1.3) \quad D(r) = r(r-1)\dots(r-n+1) + c_1 r(r-1)\dots(r-n+2) + \dots + c_{n-1} r + c_n = 0$$

que é uma equação de grau n em r e que se designa por *equação determinantal* de (1.2) na origem e as soluções serão os valores de r correspondentes aos diversos subsistemas das soluções.

Teremos uma equação *de Fuchs do primeiro tipo* na origem quando existe alguma solução que não contenha o termo em $\log x$, caso contrário teremos uma equação *de Fuchs do segundo tipo*. Neste caso ela terá um sistema fundamental de soluções da forma $y_\lambda = x^{r_\lambda} \eta_\lambda(x)$ com $\lambda = 1, \dots, n$ e $\eta_\lambda(x)$ holomorfas na origem. Por outras palavras, temos uma equação de Fuchs do primeiro tipo na origem quando a equação determinantal (1.3) tem apenas zeros simples e a diferença entre dois quaisquer deles não é um número inteiro.

Para o caso $n = 2$ temos que a equação é do primeiro tipo quando a equação determinantal tem dois zeros distintos em que a diferença entre eles não é um número inteiro, se a equação determinantal tem dois zeros distintos r e $(r+m)$ cuja diferença é um inteiro $m > 0$ surgem-nos dois casos: quando substituimos $y = x^r + d_1 x^{r+1} + \dots$ e o cálculo dos coeficientes d_k conduz a uma indeterminação temos uma equação do primeiro tipo, se temos uma impossibilidade resulta uma equação do segundo tipo. Se a equação determinantal tem um zero de multiplicidade 2 a equação é do segundo tipo.

Para que o integral geral de (1.2) seja meromorfo numa vizinhança da origem é necessário que seja uma equação de Fuchs do primeiro tipo e que (1.3) tenha zeros inteiros.

As equações de Fuchs de segunda ordem podem escrever-se da seguinte forma:

$$(1.4) \quad y'' + R(x)y' + S(x)y = 0$$

onde $R(x)$ e $S(x)$ são funções racionais e são holomorfas em todo o plano analítico excepto para um número finito de pontos que devem ser os polos e onde a equação é regular singular.

Quando temos dois pontos singulares regulares e fazendo uma mudança homográfica na variável temos o caso particular das equações de Euler. Se temos três pontos singulares regulares resulta numa *Equação de Gauss*. Ou seja,

TEOREMA 1.2. *Para mudança de variável e de função, toda a equação de Fuchs tem três pontos regulares escreve-se da forma*

$$(1.5) \quad x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0.$$

Esta equação foi estudada por Gauss; a introdução dos parâmetros α, β e γ é justificada pelas simplificações resultantes dos cálculos. Fazendo o estudo pormenorizado destes parâmetros encontramos entre outras as funções do tipo hipergeométrico.

2. Método de Laplace

O método de Laplace permite-nos encontrar a região de convergência quando o Teorema de Poincaré é insuficiente.

Uma solução de uma equação diferencial tem a seguinte representação em transformada de Laplace generalizada

$$(2.1) \quad Y(x) = \int_L e^{-xz} u(z) \, dz$$

onde L designa um determinado caminho no plano dos z , ou seja, temos de encontrar o caminho L e a função u de modo que possamos aplicar a fórmula de derivação da soma tantas vezes quantas as necessárias de modo a obter

$$(2.2) \quad y^{(k)}(x) = (-1)^k \int_L e^{-xz} u(z) \, dz.$$

A equação de Laplace

$$(2.3) \quad (a_0x + b_0)y^{(n)} + (a_1x + b_1)y^{(n-1)} + \dots + (a_nx + b_n)y = 0$$

onde a_j, b_j são constantes e $a_0 \neq 0$, tem as únicas singularidades em infinito e em $x = -\frac{b_0}{a_0}$ onde a equação é do tipo Fuchs. Fazendo uma translação poderemos ter o caso onde $b_0 = 0$ e a equação determinantal irá ter por raízes os pontos $0, 1, \dots, (n-2)$ e $(n-1-b_1)$, se este último número não é um inteiro, então existem $n-1$ soluções linearmente independentes, holomorfas em todo o plano complexo.

Voltando às equações (2.1) e (2.2) encontramos u e L de modo que

$$\int_L e^{-xz} [xP(z) + Q(z)] u(z) \, dz = 0$$

onde $P(z) = (-1)^n a_0 z^n + \dots + a_n$ e $Q(z) = (-1)^n b_0 z^n + \dots + b_n$. Integrando por partes temos

$$[-e^{-xz} P(z)u(z)]_L - \int_L e^{-xz} \left(\frac{d}{dz}(Pu) + Qu \right) dz = 0.$$

Temos então

$$[-e^{-xz} P(z)u(z)]_L = 0 \quad \int_L e^{-xz} \left(\frac{d}{dz}(Pu) + Qu \right) dz = 0.$$

É suficiente que

$$\frac{d}{dz}(Pu) + Qu = 0 \quad \text{e} \quad [-e^{-xz} P(z)u(z)]_L = 0$$

a equação diferencial anterior integra-se facilmente e escrevemos

$$\frac{d}{dz}(Pu) + Qu \frac{Q}{P} = 0$$

e encontramos $u(z) = \frac{1}{P} e^{-\int \frac{Q}{P} dz}$.

Para reduzir o desenvolvimento, vamos considerar o caso onde P tem n raízes distintas. Teremos uma solução de (2.3) da seguinte forma:

$$\int_L e^{-(x-a)z} \prod_k = 1^n (z - \alpha_k^{-A_k^{-1}}) dz = \int_L F(x, z) dz$$

onde A_k é uma constante e com a condição que L seja escolhido de modo que este integral não seja identicamente nulo e que as fórmulas (2.3) sejam válidas que será certamente o caso em que podemos tomar para L uma linha contida no plano complexo.

3. Polinómios Associados e Teorema de Markov

Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional u . A sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n^{(1)}\}$ de termo geral

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{u_0} \left\langle u_t, \frac{P_{n+1}^{(1)}(x) - P_{n+1}^{(1)}(t)}{x - t} \right\rangle$$

onde u_t representa a acção de u na variável t , diz-se *sucessão de polinómios ortogonais associados de primeira ordem*.

Esta sucessão é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos que satisfaz a mesma relação de recorrência a três termos que $\{P_n\}$

$$xP_n^{(1)}(x) = P_{n+1}^{(1)}(x) + \beta_{n+1}P_n^{(1)}(x) + \gamma_{n+1}P_{n-1}^{(1)}(x)$$

com condições iniciais $P_0^{(1)}(x) = 1$ e $P_1^{(1)}(x) = x - \beta_1$.

Generalizando este conceito temos que $\{P_n^{(k)}\}$ é a *sucessão de polinómios associados de ordem superior* que satisfazem uma relação de recorrência do tipo

$$xP_n^{(k)}(x) = P_{n+1}^{(k)}(x) + \beta_{n+k}P_n^{(k)}(x) + \gamma_{n+k}P_{n-1}^{(k)}(x)$$

com condições iniciais $P_0^{(k)} = 1$ e $P_1^{(k)} = x - \beta_k$ e $k \in \mathbb{R}$.

Consideremos uma sucessão de polinómios ortogonais definida pela relação de recorrência a três termos

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2} \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1$$

e β_n, λ_n são constantes reais ou complexas. Pelo teorema de Favard temos a garantia da existência de uma funcional linear u tal que para $k_n \neq 0$, $k_n = \lambda_1 \dots \lambda_{n+1}$ temos $\langle u, P_m P_n \rangle = k_n \delta_{m,n}$.

Quando $\langle u, x^n \rangle = u_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = r < \infty$ a função de Stieltjes

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{x^{n+1}}$$

converge na região $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.

No resultado seguinte iremos ver a importância destas funções.

TEOREMA 3.1 (Markov). *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associados a uma medida de Borel positiva ψ . Então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(x)}{P_n(x)} S(z, \omega)$$

uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C} \setminus \text{supp} \psi$.

A demonstração seguinte deve-se a Pollaczek e encontra-se em [26].

Demonstração: As sucessões de polinómios $\{P_n\}$ e $\{P_n^{(1)}\}$ satisfazem a mesma relação de recorrência

$$P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x)$$

com $P_{-1}(x) = 0$, e $P_0(x) = 1$ para $n = 1, 2, \dots$ e

$$P_n^{(1)}(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}^{(1)}(x) - C_n P_{n-2}^{(1)}(x)$$

com $P_{-1}^{(1)}(x) = -\frac{A_1}{C_1}$, e $P_0^{(1)}(x) = 0$ para $n = 1, 2, \dots$.

Suponhamos que para $|x| \geq r$ a fracção contínua

$$X(x) = \frac{A_1|}{|A_1 x - B_1|} - \frac{C_2|}{|A_2 x - B_2|} - \frac{C_3|}{|A_3 x - B_3|} - \dots$$

é uniformemente convergente. Logo para todo o inteiro $n \geq 0$ a série

$$X(x) = \frac{P_n^{(1)}(x)}{P_n(x)} + \left(\frac{P_{n+1}^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)} - \frac{P_n^{(1)}(x)}{P_n(x)} \right) + \dots \Leftrightarrow$$

$$(3.1) \quad X(x) = \frac{P_n^{(1)}(x)}{P_n(x)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{A_1 C_2 \dots C_{k+1}}{P_k(x) P_{k+1}(x)}.$$

converge uniformemente, de modo que $X(x)$ é holomorfa em infinito, e pela nossa hipótese temos que os módulos das raízes de todos os $\{P_n\}$ são menores que r . O integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C P_m(x) P_n(x) X(x) dx, \quad 0 \leq m \leq n,$$

onde C é o círculo de centro na origem e raio r , anula-se excepto para $m = n$ e isto resulta quando substituímos por S o primeiro membro de (3.1). Logo temos

$$\int_C P_m(x) P_n^{(1)}(x) dx = 0$$

temos assim

$$\int_C \frac{P_m P_n}{P_k P_{k+1}} dx = 0 \text{ onde } 0 \leq m \leq n \text{ e } k = n, n+1, \dots$$

Visto que a função integranda, holomorfa no exterior de C , anula-se em infinito com $z^{m+n-2k-1}$, ou seja, pelo menos em z^{-2} . Mas para $m = n$, o primeiro termo da série

do primeiro membro de (3.1) dá o integral

$$A_1 C_2 \dots C_{n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_n(x)}{P_{n+1}(x)} dx = A_1 C_2 \dots C_{n+1} A_{n+1}^{-1} \neq 0.$$

Utilizando

$$\langle u, P_n^2 \rangle = \frac{A_1}{A_{n+1}} \prod_{k=2}^{n+1} C_k, \quad n = 1, \dots$$

obtemos a relação de ortogonalidade

$$\langle u, P_n^2(x) \rangle \delta_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C P_n(x) P_m(x) X(x) dx, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

e daqui resulta que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C x^n X(x) dx = \frac{u_n}{2\pi i} \int_C X(x) dx = u_n = \langle u, x^n \rangle.$$

Logo u_n são os coeficientes do desenvolvimento de Taylor de $X(x)$ no infinito.

A convergência uniforme, para $|x| \geq r$, de $X(x)$ implica a convergência da série

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{x^{n+1}} \quad \text{para} \quad |x| > r$$

e assim obtemos a igualdade

$$X(x) = S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(1)}(x)}{P_n(x)}.$$

■

4. Método de Pollaczek

Iniciaremos esta secção com a definição de polinómios ortogonais dada por Pollaczek. Seja P_0, P_1, \dots um conjunto de polinómios em x definidos pela recorrência:

$$P_n(z) = (A_n z + B_n) P_{n-1}(z) - C_n P_{n-2}(z)$$

com $n = 1, 2, \dots$, $P_0(z) = 1$, $P_{-1}(z) = 0$, $A_n \neq 0$ e B_n, C_n constantes reais ou complexas. Fazendo

$$A_n = \frac{p_1(n)}{p_0(n)}, \quad B_n = \frac{p_2(n)}{p_0(n)}, \quad C_n = \frac{p_3(n)}{p_0(n)}$$

onde

$$(4.1) \quad p_j(\xi) = \alpha_{0j} \xi^m + \alpha_{1j} \xi^{m-1} + \dots + \alpha_{mj}$$

com $j = 0, 1, 2, 3$, $m \geq 1$, $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{01} \neq 0$, $\alpha_{03} \neq 0$. Então a relação de recorrência toma a forma seguinte:

$$P_n(z) = \left(\frac{p_1(n)}{p_0(n)} z + \frac{p_2(n)}{p_0(n)} \right) P_{n-1}(z) - \frac{p_3(n)}{p_0(n)} P_{n-2}(z) \Leftrightarrow$$

$$(4.2) \quad p_0(n) P_n(z) = (p_1(n) z + p_2(n)) P_{n-1}(z) - p_3(n) P_{n-2}(z)$$

com $P_0(z) = 1$, $P_{-1}(z) = 0$, $p_1(n) \neq 0$ e $p_0(n) \neq 0$.

O método utilizado por Pollaczek permite determinar a função geradora de qualquer relação de recorrência a três termos da forma (4.2). Os polinômios $\tilde{P}_n(\tilde{z}) = \alpha_{03}^{-\frac{n}{2}} P_n(z)$ onde $\tilde{z} = \frac{\alpha_{01} z + \alpha_{02}}{2\sqrt{\alpha_{03}}}$ satisfazem uma fórmula de recorrência da forma (4.1) pois os $p_j(\xi)$ têm os coeficientes do termo de maior grau

$$(4.3) \quad \alpha_{00} = 1, \quad \alpha_{01} = 2, \quad \alpha_{02} = 0 \text{ e } \alpha_{03} = 1.$$

A função geradora de qualquer relação de recorrência a três termos, com coeficientes polinomiais $g(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) x^n$ verifica uma equação diferencial linear de grau p_0 , com coeficientes polinomiais.

Vamos mostrar, através do Teorema de Poincaré, que podemos garantir a convergência desta função geradora. Com os coeficientes dados em (4.3) obtemos a seguinte equação característica

$$r^2 + 2zr + 1 = 0 \Leftrightarrow r = z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

Pelo Teorema de Poincaré temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = |z + \sqrt{z^2 - 1}|$ raiz de maior valor absoluto da equação característica. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} P_{n+1}}{x^n P_n} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{|z + \sqrt{z^2 - 1}|}.$$

Como $\frac{1}{2|z|+1} < \frac{1}{|z + \sqrt{z^2 - 1}|}$ portanto $|z| < \frac{1}{2|z|+1}$.

Depois de verificada a convergência, vamos encontrar a equação diferencial que verifica $g(x, z)$. Consideremos a equação (4.2) e o seguinte operador

$$nx^n = x \frac{d}{dx} x^n, \quad n^2 x^n = \left(x \frac{d}{dx} \right)^2 x^n, \dots$$

sendo $p_i(n)x^n = p_i(x \frac{d}{dx})x^n$, $i = 0, 1, 2, 3$. Mas

$$\begin{aligned} p_0(n)x^n &= (\alpha_{00}n^3 + \alpha_{01}n^2 + \alpha_{02}n + \alpha_{03})x^n = \\ &= \alpha_{00}(x \frac{d}{dx})^{(3)}x^n + \alpha_{01}(x \frac{d}{dx})^{(2)}x^n + \alpha_{02}(x \frac{d}{dx})x^n + \alpha_{03}x^n \end{aligned}$$

por (4.3) resulta

$$(4.4) \quad p_0(n)x^n = \left(x \frac{d}{dx}\right)^{(3)}x^n + 2\left(x \frac{d}{dx}\right)^{(2)}x^n + x^n = p_0(n)\left(x \frac{d}{dx}\right)x^n$$

juntando todas as equações p_i , $i = 0, 1, 2, 3$, multiplicando por x^n e utilizando as fórmulas anteriores obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0(n)P_n(z)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_1(n)z + p_2(n))x^{n-1}P_{n-1}(z) - \sum_{n=1}^{\infty} p_3(n)P_{n-2}(z)x^{n-2}$$

por (4.4)

$$\begin{aligned} p_0\left(x \frac{d}{dx}\right) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)x^n &= p_1\left(x \frac{d}{dx}\right)z \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}P_{n-1}(z) + p_2\left(x \frac{d}{dx}\right) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}P_{n-1}(z) \\ &\quad - p_3\left(x \frac{d}{dx}\right) \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-2}(z)x^{n-2} \end{aligned}$$

Vamos tentar escrever em cada uma destas parcelas a expressão da função geradora $g(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)x^n$:

$$\begin{aligned} p_0\left(x \frac{d}{dx}\right) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)x^n &= zp_1\left(x \frac{d}{dx}\right) \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(z) + xp_2\left(x \frac{d}{dx}\right) \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(z) \\ &\quad - x^2 p_3\left(x \frac{d}{dx}\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)x^n \end{aligned}$$

juntando-se a identidade $p_0(x \frac{d}{dx})P_0 = p_0(0)$ e sabendo que $p_0(0) = (x \frac{d}{dx})^0 c = c$, onde c é uma constante.

Obtemos a seguinte equação diferencial linear de ordem $m+1$ para a função geradora $g(x, z)$:

$$\begin{aligned} (4.5) \quad \left[p_0\left(x \frac{d}{dx}\right) - \left(zp_1\left(x \frac{d}{dx}\right) + p_2\left(x \frac{d}{dx}\right) \right) x + x^2 p_3\left(x \frac{d}{dx}\right) \right] g(x, z) &= \\ &= p_0(0). \end{aligned}$$

Como exemplo, iremos aplicar este método aos polinômios de Chebychev, Hermite e Laguerre:

EXEMPLO 4.1. *Polinômios de Chebychev*

Temos a seguinte relação de recorrência a três termos

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

então $p_0(n) = 1$, $p_1(n) = 2x$, $p_2(n) = 0$, $p_3(n) = 1$, $p_0(0) = 1$ aplicando a equação diferencial (4.5) resulta

$$(1 - 2x^2z + x^2)g(x, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad g(x, z) = \frac{1}{1 - 2x^2z + x^2}.$$

EXEMPLO 4.2. *Polinômios de Hermite*

Consideremos a seguinte relação de recorrência a três termos

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z)$$

onde $H_n(z)$ representa os polinômios de Hermite.

Temos

$$g(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} x^n$$

fazendo $P(z) = \frac{H_n(z)}{n!}$ e dividindo tudo por $n!$ vem

$$\begin{aligned} \frac{H_n(x)}{n!} &= 2z \frac{H_{n-1}(z)}{n!} - 2(n-1) \frac{H_{n-2}(z)}{n!} \\ nP_n(x) &= 2xP_{n-1}(x) - 2P_{n-2}(x) \end{aligned}$$

Logo $p_0(n) = n$, $p_1(n) = 2$, $p_2(n) = 0$, $p_3(n) = 2$, $p_0(0) = 0$.

Aplicando a equação diferencial (4.5) resulta

$$z \frac{dg}{dx}(x, z) + (-2zx + 2z^2)g(x, z) = 0.$$

Obtemos uma equação diferencial de variáveis separáveis que para se resolver basta integrar cada um dos membros

$$g(x, z) = e^{-z^2+2xz} h(z)$$

pelas condições iniciais vamos encontrar $h(z)$

$$H_0(z) = 1 \quad \text{logo} \quad g(x, 0) = e^0 h(z) \Leftrightarrow h(z) = 1.$$

$$\text{Portanto } g(x, z) = e^{-z^2+2xz}.$$

EXEMPLO 4.3. *Polinômios de Laguerre:*

Consideremos a relação de recorrência definida da seguinte forma

$$zL_n(z) = L_{n+1}(z) + (2n + \alpha + 1)L_n(z) + n(n + \alpha)L_{n-1}(z)$$

Dividindo tudo por $n!$ na relação de recorrência a três termos vem

$$z \frac{L_n(z)}{n!} = \frac{L_{n+1}(z)}{n!} + (2n + \alpha + 1) \frac{L_n(z)}{n!} + n(\alpha - 1) \frac{L_{n-1}(z)}{n!}$$

sabemos que $g(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(z)}{n!} x^n$ fazendo $P_n(z) = \frac{L_n(z)}{n!}$ então

$$zP_n(z) = (n + 1)P_{n+1}(z) + (2n + \alpha + 1)P_n(z) + (\alpha - 1)P_{n-1}(z)$$

Temos $p_0(n + 1) = n + 1$, $p_1(n + 1) = 1$, $p_2(n) = -(2n + \alpha + 1)$, $p_3(n) = \alpha - 1$, $p_0(0) = 0$. Aplicando a equação diferencial (4.5) obtemos a equação diferencial que $g(x, z)$ verifica:

$$\left[z \frac{d}{dz} + z \left(-xI + 2z \frac{d}{dz} + (\alpha - 1)I \right) + z^2 \left(z \frac{d}{dz} + (\alpha - 1)I \right) \right] g(x, z) = 0$$

primitivando vem

$$g(x, z) = (1 + z)^{1-\alpha} e^{\frac{xz}{1+z}} h(x)$$

pelas condições iniciais vamos encontrar $h(z)$. Como $L_0(z) = 1$ vem

$$g(x, 0) = e^z h(z) \Leftrightarrow h(z) = e^{-z}.$$

$$\text{Portanto } g(x, z) = (1 + z)^{1-\alpha} e^{\frac{-xz}{1+z}}.$$

5. Expressão da função geradora

Começemos por escrever a equação diferencial linear para a função geradora (4.5), obtida anteriormente, da seguinte forma $L_{x,z}g(x, z) = p_0(0)$ onde

$$(5.1) \quad L_x^0 = p_0\left(x\frac{d}{dx}\right) - p_2\left(x\frac{d}{dx}\right)x + p_3\left(x\frac{d}{dx}\right)x^2 \quad L_x^1 = p_1\left(x\frac{d}{dx}\right)x$$

e $L_{3,x} = L_x^0 - L_x^1 z$. Com a ajuda das identidades

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^c = x^c \left(x\frac{d}{dx} + c\right)^n$$

efectuamos as diferenciações indicadas pelos operadores que se encontram em (4.5) e em (5.1) obtemos as expressões seguintes

$$(5.2) \quad p_0\left(x\frac{d}{dx}\right) = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu_0} x^{m-\nu} \frac{d^{m-\nu}}{dx^{m-\nu}} \quad p_1\left(x\frac{d}{dx}\right)x = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu_1} x^{m+1-\nu} \frac{d^{m-\nu}}{dx^{m-\nu}},$$

$$p_2\left(x\frac{d}{dx}\right)x = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu_2} x^{m+1-\nu} \frac{d^{m-\nu}}{dx^{m-\nu}}, \quad p_3\left(x\frac{d}{dx}\right)x^2 = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu_3} x^{m+2-\nu} \frac{d^{m-\nu}}{dx^{m-\nu}}$$

cujos coeficientes a_{ν_i} deduzem-se a partir dos α_{ν_i} dados pelas equações (4.1) por meio das identidades

$$p_0(\xi) = \sum_{\nu=0}^m \alpha_{\nu_0} \xi^{m-\nu} = \sum_{a=\nu_0} \xi(\xi-1)\dots(\xi-m+\nu+1)\dots$$

$$p(\xi) = \sum_{a=\nu_3} (\xi-2)\dots(\xi-m+\nu-1)$$

e em particular temos

$$a_{00} = \alpha_{00} = 1, \quad a_{01} = \alpha_{01} = 2 \quad a_{02} = \alpha_{02} = 0 \quad a_{03} = \alpha_{03} = 1$$

e os restantes têm as expressões

$$(5.3) \quad a_{10} = \alpha_{10} + \frac{m^2 - m}{2} \quad a_{11} = \alpha_{11} + m^2 + m$$

$$(5.4) \quad a_{12} = \alpha_{12} \quad a_{13} = \alpha_{13} + \frac{m^2 + 3m}{2}$$

e substituindo em (4.5) as expressões (5.2) com os valores obtidos anteriormente para os a_{ν_i} e temos

$$(5.5) \quad x^m(x^2 - 2zx + 1) \frac{d^m g}{dx^m} + \sum_{\nu=1}^m x^{m-\nu} (a_{\nu_0} - (a_{\nu_1}z + a_{\nu_2})x + a_{\nu_3}x^2) \frac{d^{m-\nu} g}{dx^{m-\nu}} = p_0(0).$$

Fazendo

$$(5.6) \quad q_0(x, z) = x^m(x^2 - 2zx + 1) \quad q_\nu(x, z) = ((a_{\nu_1}z + a_{\nu_2})x + a_{\nu_3}x^2)$$

a equação (5.5) toma a seguinte forma

$$(5.7) \quad q_0(x, z)g^{(m)} + q_1(x, z)g^{(m-1)} + \dots + q_m(x, z)g = p_0(0)$$

que é uma equação do tipo Fuchs.

Toda a equação desta forma são tais que

$$p_0(0) = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu_0} n(n-1)\dots(n-m+\nu+1) \neq 0$$

com $n = 1, \dots$ possui uma única solução da forma

$$g(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(x)$$

e os coeficientes de $P_n(x)$ satisfazem as relações

Para construir a solução particular $g(x, z)$ desta equação que é holomorfa para $x = 0$, necessitamos de certas soluções da equação homogênea correspondente

$$\sum_{\nu=0}^m q_\nu(x, z)y^{(m-\nu)} = 0$$

que pode ser escrita da seguinte forma

$$(5.8) \quad L_{x,z}y(x, z) = 0$$

e outras vezes utilizaremos certas soluções da correspondente equação diferencial adjunta.

As singularidades de (5.8) são $x = \infty$, $x = 0$ e os zeros de $x^2 - 2zx + 1 = 0$ que designaremos por $\alpha = z - \sqrt{z^2 - 1}$ e $\beta = z + \sqrt{z^2 - 1}$. Estas soluções serão consideradas no plano dos z fechado no infinito e cortado ao longo do segmento $-1 \leq z \leq 1$. Designaremos este corte por D , incluindo os dois lados do corte,

excepto os pontos $z = \pm 1$ e definimos o sinal de $\sqrt{z^2 - 1}$ de modo que $\sqrt{z^2 - 1} \approx z$ para $z \rightarrow \infty$. Temos então $|\alpha(z)| \leq 1$ e $|\beta(z)| \geq 1$ para $z \in D$ e o sinal de igualdade só é válido para $-1 < z < 1$. Ou seja, para todo o z finito, excepto para $z = \pm 1$ os quatro pontos singulares $0, \alpha(z), \beta(z), \infty$ são todos distintos e regulares.

Resumindo, segundo as nossas hipóteses, a função $g(x, z)$ satisfaz uma equação linear de ordem m , $L(g(x, z)) = c$ onde c designa uma constante. Logo o primeiro membro é do tipo Fuchs excepto para dois valores do parâmetro z que fazemos coincidir com ± 1 .

Podemos prolongar $g(x, z)$ analiticamente além do circulo de convergência da sua série de definição, e conhecendo a natureza e a posição das singularidades dessa função podemos definir o comportamento assintótico dos $P_n(z)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Numa grande parte do trabalho de Pollaczek aparecem os integrais de Hadamard. Estes são utilizados porque simplificam a demonstração e a escrita das fórmulas. Este integral tem a seguinte forma

$$r_n(z) = \int_{\alpha}^{\alpha^*} \xi^n \eta(\xi, z) d\xi$$

com $\alpha(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}$ e $n = 0, 1, \dots$ e onde $\eta(x, z)$ designa a solução, única, da equação diferencial do tipo Fuchs $\mathcal{L}(\eta) = 0$, adjunta a $L(y) = 0$, que é canónica para o ponto regular $x = \alpha$ sem que seja holomorfa.

Os $r_n(z)$ são holomorfos excepto para os pontos $z = -1, 1$ e em infinito onde em geral estes estão ramificados logaritmicamente. Quando multiplicadas por constantes apropriadas c_{n+1} , as funções $r_{n+1}(z)$ satisfazem a relação de recorrência dos $P_n(z)$ e por outro lado $P_n(z)$ pode ser representado linearmente pelos valores do ramo principal de $r_{n+1}(z)$, que é holomorfo em $z = \infty$ sobre os limites do corte em $-1, 1$. Quando z contorna um dos pontos $-1, 1$ e em infinito, $r_n(z)$ é uma transformação linear e os seus coeficientes exprimem-se por meio dos coeficientes das transformações de passagem entre os diferentes sistemas de soluções canónicas da equação $\mathcal{L}(\eta) = 0$.

Os momentos dos polinômios $P(z)$ resultantes da sucessão dos $P_n(z)$, estão definidos como os restos numéricos de $P(z)$ em relação ao módulo que têm como elementos da base os produtos $P_n(z)P_{n+1}(z)$ e $P_n(z)P_{n+2}(z)$.

No nosso caso onde $\chi(z)$ é holomorfa em infinito, os $P_n(z)$ formam sobre os círculos $|z| = r$, de raio tão grande quanto se queira, um sistema de funções ortogonais com densidade $\chi(z)$, e temos a relação

$$\langle u, P(z) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} P(z) \chi(z) dz.$$

EXEMPLO 5.1. *Polinômios de Legendre generalizados*

Estes polinômios estão definidos pela seguinte relação de recorrência

$$nP_n - ((2n - 1 + a)z + b)P_{n-1} + (n - 1)P_{n-2}$$

com condições iniciais $P_0 = 1$, $P_{-1} = 0$ e $n = 1, 2, \dots$ onde a, b são constantes. Neste caso

$$m = 1, \quad p_0(n) = n, \quad p_1(n) = 2n + a + 1, \quad p_2(n) = b \quad \text{e} \quad p_3(n) = n - 1$$

e aplicando o método descrito, isto é, usando a equação (4.5) obtemos

$$(5.9) \quad x(x^2 - 2xz + 1)g'_x(x, z) + x(x - (a + 1)z - b)g(x, z) = 0$$

e por (5.3) e por (5.4) temos

$$a_{10} = 0, \quad a_{11} = a + 1, \quad a_{12} = b \quad \text{e} \quad a_{13} = 1$$

temos

$$A(z) = \frac{1}{2} + \frac{az + b}{2\sqrt{z^2 - 1}} \quad \text{e} \quad B(z) = \frac{1}{2} + \frac{az + b}{2\sqrt{z^2 - 1}} = 1 - A(z)$$

e a solução de (5.9) é

$$g(x, z) = \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{-A(z)} \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{-B(z)}.$$

A expressão da medida de ortogonalidade vem dada por

$$\chi(z) = (1 + a) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2\nu+1}}{A + \nu}.$$

)

CAPÍTULO III

Polinómios Ortogonais Discretos

O objectivo principal deste capítulo consiste no estudo da família clássica de uma forma unificada. Começaremos por estudar os polinómios ortogonais discretos tendo como ponto de partida o trabalho de Lancaster [18].

Começamos por considerar um operador discreto

$$\Delta_h p = \frac{p(x+h) - p(x)}{h}$$

a partir dele faremos todo o estudo relativo à fórmula de Rodrigues, medida de ortogonalidade, relação de recorrência a três termos e respectivos coeficientes β_n e γ_n .

Primeiro explicitaremos a medida de ortogonalidade ω a partir de uma equação do tipo Pearson $\Delta(\phi\omega) = \psi\omega$ e utilizando o operador S , operador inverso de Δ .

Deduziremos a fórmula de Rodrigues do mesmo modo que fez Vicente Gonçalves. Partiremos da equação do tipo de Sturm-Liouville

$$\phi\omega\Delta^2 P_n + \psi\omega\Delta P_n - \lambda_n\omega P_n = 0$$

e fazendo mudanças de variável adequadas chegaremos à formula pretendida $\omega P_n(x) = \Delta^n v$. É de salientar que em todo este processo não será usada a ortogonalidade tornando mais simples todo este estudo.

Depois encontraremos os coeficientes β_n e γ_n da relação de recorrência a três termos que a sucessão $\{\Delta P_n\}$ verifica. Obteremos estes coeficientes em função de ϕ, ψ e de h . Fazendo a passagem ao limite nas expressões de β_n e de γ_n obteremos uma expressão que nos permite obter os coeficientes das relações de recorrência a três termos dos polinómios clássicos. Veremos também que o caso contínuo se obtém a partir dos polinómios discretos, resultando nos polinómios ortogonais clássicos, Hermite, Laguerre, Jacobi e Bessel.

É importante referir que o método usado por Vicente Gonçalves pode ser usado para qualquer outro operador discreto desde que seja simetrizável ao operador de segunda ordem que lhe é análogo.

No final, o Teorema de Sturm fornece-nos a região onde estão localizados os zeros das famílias de polinómios ortogonais consideradas anteriormente.

1. Caso Discreto

Consideremos uma sucessão de polinómios mónicos, $\{P_n\}$ que verifica a seguinte equação às diferenças

$$(1.1) \quad \phi(x)\Delta_h^2 P_n(x) + \psi(x)\Delta_h P_n(x) - \lambda_n P_n = 0$$

onde $\phi(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ e $\psi = b_0x + b_1$ e onde o operador discreto está definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta_h : \mathbb{P} &\rightarrow \mathbb{P} \\ p &\mapsto \frac{p(x+h) - p(x)}{h}. \end{aligned}$$

Para facilitar a linguagem a partir daqui Δ significa Δ_h .

Se esta sucessão de polinómios for ortogonal então ela será ortogonal relativamente a uma funcional que é solução de uma equação de Pearson. Essas sucessões de polinómios mónicos têm uma representação em Fórmula de Rodrigues e verificam uma relação de recorrência a três termos onde os coeficientes serão determinados em termos de ϕ e ψ .

De seguida iremos estabelecer alguns resultados que nos serão úteis nas secções seguintes.

Se $\{P_n\}$ verifica a equação (1.1) então $\{\Delta P_n\}$ verifica uma equação do mesmo tipo, pois

$$\begin{aligned}
 \Delta(f(x)g(x)) &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) \\
 &= (\Delta f(x))g(x) + f(x+h)\Delta g(x) \\
 &= (f(x)(\Delta g(x)) + (\Delta f(x))g(x+h)).
 \end{aligned}$$

Assim

$$\Delta(\phi(x)\Delta^2 P_n(x)) + \Delta(\psi(x)\Delta P_n(x)) - \lambda_n \Delta P_n(x) = 0$$

$$\Delta\phi(x+h)\Delta^2(\Delta P_n(x)) + (\psi(x+h) + \Delta\phi(x))\Delta(\Delta P_n(x)) - (\lambda_n - \Delta\psi(x))\Delta P_n(x) = 0.$$

Consideremos uma fórmula tipo Leibniz para a iteração do operador Δ :

$$\begin{aligned}
 \Delta^2(f(x)g(x)) &= \Delta(f(x+h)\Delta g(x)) + \Delta(\Delta f(x)g(x)) \\
 &= f(x+2h)\Delta^2 g(x) + \Delta f(x+h)\Delta g(x) + \Delta f(x+h)\Delta g(x) \\
 &\quad + (\Delta^2 f(x))g(x) \\
 &= f(x+2h)\Delta^2 g(x) + 2\Delta f(x+h)\Delta g(x) + \Delta f(x)g(x).
 \end{aligned}$$

Generalizando temos

$$\Delta^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-k} f(x+kh) \Delta^k g(x)$$

Demonstração: Vamos provar esta igualdade por indução matemática:

para $n = 1$ temos

$$\Delta(f(x)g(x)) = (\Delta f(x))g(x) + f(x+h)\Delta g(x)$$

como já tínhamos verificado.

Suponhamos que a igualdade é válida para $n = 1, \dots, s$, vamos mostrar que se verifica para $n = s + 1$:

$$\begin{aligned}
\Delta^{s+1}(f(x)g(x)) &= \Delta(\Delta^s(f(x)g(x))) \\
&= \Delta\left(\sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \Delta^{s-k} f(x+kh) \Delta^k g(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \Delta(\Delta^{s-k} f(x+kh) \Delta^k g(x)) \\
&= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} [\Delta^{s-k}(f(x+(k+1)h)) \Delta^{k+1} g(x)] \\
&\quad + \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} [\Delta^{s-(k-1)} f(x+kh) \Delta^k g(x)] \\
&= f(x+(s+1)h) \Delta^{s+1} g(x) + (\Delta^{s+1} f(x)) g(x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^s \left(\binom{s}{k-1} + \binom{s}{k} \right) \Delta^{s-(k-1)} (f(x+(k+1)h)) \Delta^k g(x) \\
&= \sum_{k=1}^{s+1} \binom{s+1}{k} \Delta^{s+1-k} (f(x+(k)h)) \Delta^k g(x),
\end{aligned}$$

o que mostra o pretendido. ■

2. Fórmula de Rodrigues

Nesta secção iremos deduzir uma fórmula do tipo Rodrigues utilizando o método e resultados apresentados por Vicente Gonçalves em [30] e [31].

Começemos por considerar que a funcional u tem a seguinte representação:

$$\begin{aligned}
u &: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \\
p &\mapsto \mathcal{S}p\omega(x)\Delta x.
\end{aligned}$$

onde \mathbf{S} é o operador inverso de Δ e ω é tal que $\Delta(\phi\omega) = \psi\omega$ e portanto

$$\begin{aligned}
\phi(x+h)\Delta\omega + (\Delta\phi)\omega &= \psi\omega \\
\Delta\omega &= \frac{\psi(x) - \Delta\phi(x)}{\phi(x+h)}.
\end{aligned}$$

Para obtermos a expressão de ω começamos por multiplicar (1.1) por ω . Temos

$$(2.1) \quad \phi\omega\Delta^2P_n + \psi\omega\Delta P_n - \lambda_n\omega P_n = 0.$$

Pelo que, fazendo

$$\phi\omega\Delta^2P_n + \psi\omega\Delta P_n = \Delta(t(x)\Delta y(x)) = t(x+h)\Delta^2y(x) + \Delta t(x)\Delta y(x)$$

obtém-se $\phi\omega = t(x+h)$ e $\psi\omega = \Delta t(x)$ e a equação anterior toma a forma seguinte

$$\omega(x+h)\phi(x+h) - \omega(x)\phi(x) = h\omega(x+h)\psi(x+h).$$

Deste modo

$$\omega(x) = \exp\left(\mathcal{S}\frac{1}{h}\log\left(\frac{\phi(x)}{\phi(x+h) - h\psi(x+h)}\right)\Delta x\right)$$

com $\phi(x+h) - h\psi(x+h) \neq 0$.

Consideremos agora

$$\begin{aligned} \Delta^2(\phi_1\omega P_n) &= \phi_1\omega(x+2h)\Delta^2P_n + 2\Delta(\phi_1\omega)(x+h)\Delta P_n + \Delta^2(\phi_1\omega)P_n\Delta(\psi_1\omega P_n) \\ &= \psi_1\omega(x+h)\Delta P_n + \Delta(\psi_1\omega)P_n, \end{aligned}$$

ou seja, $\Delta(\phi_1\omega) = \psi_1\omega$ e consequentemente a equação (2.1) toma a forma

$$\Delta^2(\phi_1\omega P_n) + \Delta(\psi_1\omega P_n) - \lambda_n\omega P_n = 0.$$

Fazendo $z_n = \omega P_n$ obtém-se

$$\phi_1(x+2h)\Delta^2z_n + 2\Delta\phi_1(x+h)\Delta z_n + \Delta^2\phi_1(x)z_n - \psi_1(x+h)\Delta z_n - \Delta\psi_1z_n - \lambda_nz_n = 0$$

$$\phi_1(x+2h)\Delta^2z_n + (2\Delta\phi_1(x+h) - \psi_1(x+h))\Delta z_n - (\lambda_n - \Delta^2\phi_1 + \Delta\psi_1)z_n = 0.$$

Fazendo, agora, uma segunda mudança de variável $z_n = \Delta^n v$ obtemos

$$\phi_1(x+2h)\Delta^{n+2}v + (2\Delta\phi_1(x+h) - \psi_1(x+h))\Delta_{n+1}v - (\lambda_n - \Delta^2\phi_1 + \Delta\psi_1)\Delta^n v = 0.$$

Determinemos a equação em diferenças de ordem n que coincide com esta última equação por aplicação da regra de Leibniz

$$\begin{aligned} &\phi_1(x+(2-n)h)\Delta^2v + ((2-n)\Delta\phi_1(x+(1-n)h) - \psi_1(x+h))\Delta v - [\lambda_n - \\ &\Delta^2\phi_1(x-nh) + \Delta\psi_1(x-nh) - n(2-n)\Delta^2\phi_1(x+nh) + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2\phi_1(x+nh) - \\ &n\Delta\psi_1(x+nh)]v = \Delta N, \end{aligned}$$

com grau $N \leq n$. Simplificando temos,

$$\left\{ \phi_1(x+h)\Delta^2 v + \Delta\phi_1(x)\Delta v \right\} - \left\{ [(1-n)\Delta\phi_1(x) - \psi_1(x)]\Delta v + \Delta[\lambda_n - \Delta^2\phi_1(x-nh) + \Delta\psi_1(x-nh) - n(2-n)\Delta^2\phi_1(x+nh) + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2\phi_1(x+nh) - n\Delta\psi_1(x+nh)]v \right\} = \Delta N$$

ou ainda,

$$\Delta[\phi_1(x+h)\Delta v + ((1-n)\Delta\phi_1(x) - \psi_1(x))v] = \Delta N.$$

Assim v é tal que

$$\phi_1(x+h)\Delta v = (\psi_1 + (n-1)\Delta\phi_1)v + N.$$

Procuramos a solução geral da forma $v_h c$ onde v_h é o valor correspondente à equação homogénea

$$(2.2) \quad \phi_1(x+h)\Delta v = (\psi_1 + (n-1)\Delta\phi_1)v.$$

Fazendo $N \equiv 0$ resulta $c = c_n$ e temos $\omega P_n = c_n \Delta^n v_h$.

Vamos determinar o valor de v_h .

Se $\{P_n\}$ é ortogonal relativamente a ω então $\Delta(\phi\omega) = \psi\omega$ e portanto

$$\{\Delta P_n\} \equiv \phi(x+h)\Delta^2(\Delta P_n) + (\psi(x+h) - \Delta\phi)\Delta(\Delta P_n) = (\lambda_n - \Delta\psi)\Delta P_n$$

As propriedades determinadas para $\{P_n\}$ continuam válidas para $\{\frac{\Delta^j P_n}{n+j}\}$ ou seja, se $\{\frac{\Delta P_n}{n}\}$ é ortogonal relativamente a ω_1 então ω_1 é tal que

$$(2.3) \quad \Delta(\phi_1\omega_1) = \psi_1\omega_1 \equiv \phi_1(x+h)\Delta\omega_1 = (\psi_1 - \Delta\phi_1).$$

Generalizando para um j qualquer temos que $\{\frac{\Delta^{n+j} P_{n+j}}{n+j}\}$ é ortogonal relativamente a ω_j onde $\phi_j = \phi(x + (j-1)h)$ e $\omega_j = \phi_j\omega_{j-1}$.

Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a ω tal que

$$\Delta^2(\phi_1\omega P_n) = (\phi_1\omega)(x+2h)\Delta^2 P_n + 2\Delta(\phi_1\omega)(x+h)\Delta P_n + \Delta^2(\phi_1\omega)P_n$$

e

$$\Delta(\psi_1\omega P_n) = (\psi_1\omega)(x+h)\Delta P_n + \Delta(\psi_1\omega)P_n - \lambda_n\omega P_n.$$

Substituindo estes valores em (1.1) conclui-se que

$$(2.4) \quad \Delta^2(\phi_1\omega P_n) - (\Delta(\psi_1\omega P_n) - \lambda_n\omega P_n) = (\phi_1\omega)(x+2h)\Delta^2 P_n + \\ 2\Delta(\phi_1\omega)(x+h)\Delta P_n + \Delta^2(\phi_1\omega)P_n - (\psi_1\omega)(x+h)\Delta P_n - \Delta(\psi_1\omega)P_n.$$

Uma vez que

$$(\phi_1\omega)(x+2h) = \phi\omega - (\psi_1\omega)(x+h) + 2\Delta(\phi_1\omega)(x+h) = 2\psi\omega = (\psi_1\omega)(x+h)$$

e

$$\Delta^2(\phi_1\omega) - \Delta(\psi\omega) = \lambda_n\omega$$

Conclui-se, atendendo à equação (2.4)

$$\Delta^2(\phi_1\omega P_n) - (\Delta(\psi_1\omega P_n) - \lambda_n\omega P_n) = \phi\omega\Delta^2 P_n + \psi\omega\Delta P_n - \lambda_n\omega P_n.$$

Se ω_j for o factor de simetrização da equação que resulta de (2.4) por aplicação de Δ j -vezes tem-se que

$$\phi(x+h)\Delta^2(\Delta P_n) + (\psi(x+h) + \Delta\phi)\Delta(\Delta P_n) - (\lambda_n - \Delta\psi)\Delta P_n = 0.$$

Façamos $\phi(x+h) = \phi_1$ e $\psi(x+h) + \Delta\phi = \psi_1$. Assim, por (2.3) temos

$$\omega_1 = \phi_1\omega = \phi(x+h)\omega,$$

$$\omega_2 = \phi_2\omega = \phi_1(x+h)\omega_1 = \phi(x+2h)\phi(x+h)\omega$$

e procedendo por indução em n conclui-se que

$$\omega_n = \phi(x+nh)\phi(x+(n-1)h)\dots\phi(x+h)\omega = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \phi(x+jh)\omega\right).$$

Deste modo ω_n é solução da equação homogénea (2.2). Denotando

$$G_n(x) = \prod_{j=0}^{n-1} \phi(x+jh)\omega$$

obtemos a equação $G_n(x)\omega = v_h$, ou seja,

$$P_n\omega = c_n\Delta^n(G_n(x)\omega).$$

Isto é, obtemos a *fórmula de Rodrigues* para as soluções polinomiais de (1.1):

$$\omega P_n(x) = \Delta^n v.$$

3. Relação de Recorrência a Três Termos

Mostremos agora que $\{P_n\}$ verifica uma relação de recorrência a três termos para as soluções polinomiais de (1.1) e determinaremos uma condição necessária e suficiente para que $\{P_n\}$ seja uma sucessão de polinômios ortogonais mónica.

Suponhamos que o operador $L_n = \phi\Delta^2 + \psi\Delta - \lambda_n I$ tem, para cada n , uma única solução polinomial de grau n (mónica). Começemos por definir

$$u_n = L_{n+1}((x - \beta_n)P_n),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u_n &= \phi\Delta^2((x - \beta_n)P_n) + \psi\Delta((x - \beta_n)P_n) - \lambda_{n+1}(x - \beta_n)P_n \\ &= \phi(x + 2h - \beta_n)\Delta^2 P_n + 2\phi\Delta(x + h - \beta_n)\Delta P_n + \psi(x + h - \beta_n)\Delta P_n \\ &\quad + \psi\Delta(x - \beta_n)P_n - \lambda_{n+1}(x - \beta_n)P_n \\ &= (x + 2h - \beta_n)[\phi\Delta^2 P_n + \psi\Delta P_n - \lambda_n P_n] + 2\phi\Delta P_n - h\psi\Delta P_n \\ &\quad - (\lambda_{n+1} - \lambda_n)(x - \beta_n)P_n + \psi P_n + \lambda_n h P_n \end{aligned}$$

concluindo-se portanto que

$$(3.1) \quad u_n = (2\phi - h\psi)\Delta P_n + \psi P_n - [(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(x - \beta_n) - 2h\lambda_n]P_n$$

com $\lambda_n = n(n-1)a_0 + nb_0$.

Como P_n é um polinômio mónico tem a seguinte representação

$$P_n = x^n + p_{1,n}x^{n-1} + p_{2,n}x^{n-2} + \dots + p_{n,n}$$

determinaremos uma expressão para u_n tendo em atenção que

$$\Delta x^n = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}.$$

e que

$$\begin{aligned} (3.2) \quad \Delta P_n &= nx^{n-1} + \left(\frac{(n-1)n}{2}h + (n-1)p_{1,n} \right) x^{n-2} \\ &\quad + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2}h^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}p_{1,n}h + (n-2)p_{2,n} \right) x^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Como o grau de u_n tem de ser exactamente $(n - 1)$ resulta que os coeficientes dos termos em x^n e x^{n+1} tem de ser zero. Assim substituindo as expressões de ΔP_n e P_n em (3.1) e atendendo a (3.2) resulta que o coeficiente do termo em x^{n+1} é:

$$2a_0n + b_0 + (\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0$$

e o coeficiente do termo de x^n é o seguinte:

$$2a_0\left(\frac{n(n-1)}{2}h + (n-1)p_{1,n}\right) - hb_0n + b_1 + b_0p_{1,n} - (\lambda_{n+1} - \lambda_n)p_{1,n} + \beta_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n) + 2\lambda_nh + 2a_1n = 0.$$

Desta equação determinamos β_n :

$$(3.3) \quad \beta_n = -\frac{a_0n(n-1)h - hb_0n + 2a_1n + b_1 + 2h\lambda_n}{-2a_0n - b_0} + \frac{2a_0p_{1,n}}{2a_0n + b_0}$$

Como u_n tem grau exactamente $(n - 1)$, conclui-se que o coeficiente da potência x^{n-1} é não nulo. O coeficiente desta potência é

$$(3.4) \quad (a_0(n-1)(n-2)h + (2a_1 - b_0h)(n-1) + \beta_n(-2a_0n - b_0) + 2h\lambda_n + b_1)p_{1,n} + (4a_0)p_{2,n} + \frac{a_0n(n-1)(n-2)h^2}{3} + a_1n(n-1)h + 2a_2n + b_0\frac{n(n-1)h^2}{2} + b_1nh \neq 0.$$

Mostraremos seguidamente que $L_{n-1}(\mathcal{U}_n) = 0$. Observe-se que o operador L_{n-1} tem, a menos de um factor, P_{n-1} como única solução, para isso calculando

$$\phi\Delta^2\mathcal{U}_n + \psi\Delta\mathcal{U}_n + \lambda_{n-1}\mathcal{U}_n = k_nP_n$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta^2\mathcal{U}_n &= (2\phi - h\psi)(x + 2h)\Delta^3P_n + 2\Delta(2\phi - h\psi)(x + h)\Delta^2P_n + \Delta^2(2\phi - h\psi)\Delta P_n \\ &+ \psi(x + 2h)\Delta^2P_n + 2\Delta\psi(x + h)\Delta P_n - [(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(x + 2h - \beta_n) - 2h\lambda_n]\Delta^2P_n \\ &+ 2(\lambda_{n+1} - \lambda_n)\Delta P_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{U}_n &= (2\phi - h\psi)(x + h)\Delta^2P_n + \Delta(2\phi - h\psi)\Delta P_n + \psi(x + h)\Delta P_n + \\ &\Delta\psi P_n - [(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(x + h - \beta_n) - 2h\lambda_n]\Delta P_n - (\lambda_{n+1} - \lambda_n)P_n. \end{aligned}$$

mas uma vez que \mathcal{U}_n tem grau menor ou igual a n resulta que $k_n = 0$, para $n = 1, 2, \dots$ logo $L_{n-1}\mathcal{U}_n = 0$. Portanto $\mathcal{U}_n = s_n P_{n-1}$ onde s_n é o coeficiente da potência x^{n-1} de \mathcal{U}_n e é dado por (3.4).

A sucessão de polinômios ortogonais $\{P_n\}$ verifica uma relação de recorrência a três termos, e existem (β_n) , (γ_n) tais que

$$P_{n+1} - (x - \beta_n)P_n - \gamma_n P_{n-1} = 0,$$

onde $P_0 = 1$ e $P_1 = x - \beta_0$. Determinemos γ_n tal que

$$L_{n+1}[P_{n+1} - (x - \beta_n)P_n - \gamma_n P_{n-1}] = 0$$

para $n = 0, 1, \dots$. Da linearidade do operador L_{n+1} obtemos

$$\begin{aligned} & L_{n+1}[P_{n+1}] - L_{n+1}[(x - \beta_n)P_n] - \gamma_n L_{n+1}[P_{n-1}] \\ &= -[k_n - \gamma_n(\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})]P_{n-1}. \end{aligned}$$

Deste modo $\gamma_n = \frac{s_n}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1}}$ para $n = 1, 2, \dots$

Com o objectivo de determinar $p_{j,n}$ necessitamos de calcular

$$\begin{aligned} \Delta x^2 P_n = & n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} h^{k-1} + (n-1) \left(\frac{n}{2} h + p_{1,n} \right) \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{n-2-k} h^{k-1} \\ & + (n-2) \left(\frac{n(n-1)}{3!} h^2 + \frac{n-1}{2} p_{1,n} h + p_{2,n} \sum_{k=1}^{n-3} \binom{n-3}{k} x^{n-3-k} h^{k-1} + \dots \right) \end{aligned}$$

As expressões de $p_{1,n}$ e de $p_{2,n}$ obtêm-se igualando os coeficientes dos termos em x^n e x^{n-1} a zero. O coeficiente do termo em $[x^n]$ é o seguinte:

$$a_0 n(n-1) + b_0 n - \lambda_n = 0$$

e o coeficiente do termo em $[x^{n-1}]$ tem a expressão

$$\begin{aligned} & a_0 \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2} h + (n-1)(n-2) \left(\frac{nh}{2} + p_{1,n} \right) \right) + a_1 n(n-1) \\ & - b_0(n-1) \left(\frac{nh}{2} + p_{1,n} \right) - nb_1 + \lambda_n p_{1,n} = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$(3.5) \quad p_{1,n} = \frac{(2a_0 n(n-1)(n-2) + \frac{n}{2}(n-1)b_0)h + a_1 n(n-1) + nb_1}{a_0(2n-2) + b_0}$$

O coeficiente dos termos em x^{n-2} :

$$\begin{aligned} & a_2 n(n-1) + a_1 \left(\frac{h}{2} n(n-1)(n-2) + (n-1)(n-2) \left(\frac{nh}{2} + p_{1,n} \right) \right) + \\ & a_0 \left(\frac{1}{3} n(n-1)(n-2)(n-3)h^2 + \frac{h}{2} (n-1)(n-2)(n-3) \left(\frac{nh}{2} + p_{1,n} \right) \right) + \\ & a_0 \left((n-2)(n-3) \left(\frac{(n-1)h}{2} p_{1,n} + p_{2,n} \right) \right) + b_0 (n-1)(n-2) \left(\frac{nh^2}{6} + p_{1,n} \frac{h}{2} \right) + \\ & + b_0 ((n-2)p_{2,n}) + b_1 \left((n-1) \left(n \frac{h}{2} + p_{1,n} \right) \right) - \lambda_n p_{2,n} = 0 \end{aligned}$$

torna-se assim possível determinar recursivamente o coeficiente de $p_{2,n}$ a partir de $p_{1,n}$ designadamente

$$\begin{aligned} (3.6) \quad p_{2,n} = & \frac{n(n-1)(n-2)h(a_1 + a_0(n-3)\frac{5}{12} + b_0\frac{h}{6}) + b_1 n(n-1)\frac{h}{2}}{2(3a_0 - 2a_0 - b_0)} + \\ & + p_{1,n} \frac{b_1(n-1) + a_0(n-1)(n-2)(n-3)h + a_1(n-1)(n-2) + b_0(n-1)(n-2)\frac{h}{2}}{2(3a_0 - 2a_0 - b_0)} \end{aligned}$$

onde $p_{1,n}$ está definido em (3.5).

Substituindo na equação (3.3) a expressão de $p_{1,n}$ dada por (3.5) obtemos β_n em termos de a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 e h :

$$\begin{aligned} (3.7) \quad \beta_n = & -\frac{a_0 n(n-1)h - hb_0 n + 2a_1 n + b_1 + 2h\lambda_n}{-2a_0 n - b_0} + \\ & \frac{2a_0}{2a_0 n + b_0} \frac{(2a_0 n(n-1)(n-2) + \frac{n}{2}(n-1)b_0)h + a_1 n(n-1) + nb_1}{a_0(2n-2) + b_0} \end{aligned}$$

Substituindo, na expressão de s_n o valor de $p_{n,1}$ dado por (3.5) e o de $p_{n,2}$ dado por (3.6) obtemos a expressão de γ_n em termos de a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 e h :

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \gamma_n = & \frac{(a_0(n-1)(n-2)h + (2a_1 - b_0h)(n-1) + \beta_n(-2a_0n - b_0) + 2h\lambda_n + b_1)p_{1,n}}{-2(2a_0n + b_0)} \\ & + \frac{(4a_0)p_{2,n} + \frac{a_0 n(n-1)(n-2)h^2}{3} + a_1 n(n-1)h + 2a_2 n + b_0 \frac{n(n-1)h^2}{2} + b_1 nh}{-2(2a_0n + b_0)}. \end{aligned}$$

Depois de encontrados β_n e γ_n , coeficientes da relação de recorrência a três termos, estamos em condições de enunciar um resultado fundamental:

TEOREMA 3.1. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinômios mónicos que são soluções de (1.1) e que são ortogonais quando e só quando $k_n \neq 0$ e a sua funcional de ortogonalidade u verifica a equação de Pearson $\Delta(\phi u) = \psi u$. Além disso, $\{P_n\}$ tem uma representação em fórmula de Rodrigues.*

Resulta assim que $\{P_n\}$ tem a seguinte caracterização :

TEOREMA 3.2. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinômios ortogonais que verifica (1.1). Então*

- (1) $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinômios ortogonais mónicos satisfaz um operador da forma

$$\phi \Delta^2 P_n + \psi \Delta P_n = \lambda_n P_n;$$

- (2) $\{P_n\}$ e $\{\frac{\Delta P_n}{n}\}$ são sucessões de polinômios ortogonais mónicos;

- (3) $\{P_n\}$ é tal que existem $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$P_n = \frac{\Delta P_{n+1}}{n+1} + a_n \frac{\Delta P_n}{n} + b_n \frac{\Delta P_{n-1}}{n-1};$$

- (4) $\{P_n\}$ é tal que existem $c_n, d_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\phi \Delta^2 P_n + \psi \Delta P_n = n a_0 P_{n+1} + c_n P_n + d_n P_{n-1}.$$

Demonstração: A equivalência (1) \Leftrightarrow (2) já foi provada.

Vamos mostrar que (2) \Leftrightarrow (3). Consideremos a relação de recorrência a três termos de P_n

$$P_{n+1} - (x - \beta_n)P_n + \gamma_n P_{n-1} = 0$$

e temos que

$$P_n = \Delta P_{n+1} - (x + h - \beta_n)\Delta P_n + \gamma_n P_{n-1}.$$

Por outro lado

$$(3.9) \quad P_n = \frac{\Delta P_{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^n a_{n,k} \frac{\Delta P_k}{k}.$$

Substituindo as duas equações anteriores em (3.9), obtemos a relação

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P_{n+1}}{n+1} - \Delta P_{n+1} + \left[\frac{a_{n,n}}{n} + (x + h - \beta_n) \right] \Delta P_n + \\ \left(\frac{a_{n,n-1}}{n-1} - \gamma_n \right) \Delta P_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2} a_{n,j} \frac{\Delta P_j}{j} = 0. \end{aligned}$$

Verifica-se portanto

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P_{n+1}}{n+1} - \left[(x - (-h - \beta_n - \frac{a_{n,n}}{n})) \right] \frac{\Delta P_n}{n} + \\ \left(\frac{\gamma_n(n-1)}{n} - \frac{a_{n,n-1}}{n} \right) \frac{\Delta P_{n-1}}{n-1} = 0, \end{aligned}$$

onde $\left(\frac{\gamma_n(n-1)}{n} - \frac{a_{n,n-1}}{n} \right) \frac{\Delta P_{n-1}}{n-1} \neq 0$ quando e só quando

$$P_n = \frac{\Delta P_{n+1}}{n+1} + a_{n,n} \frac{\Delta P_n}{n} + a_{n,n-1} \frac{\Delta P_{n-1}}{n-1}.$$

A caracterização (4) obtém-se como caso particular de $u_n = k_n P_{n-1}$ fazendo

$$u_n = (2\phi - h\psi)\Delta P_n + \psi P_n - [(2a_0n + b_0)(x - \beta_n) - 2h\lambda_n] P_n.$$

■

Para as sucessões de polinômios mónicos que verificam a condição $L_n P_n = 0$ temos a seguinte representação :

TEOREMA 3.3. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinômios mónicos que são solução de $L_n P_n = 0$. Então $\{P_n\}$ verifica a relação*

$$(3.10) \quad 2\phi\Delta P_n + \psi P_n - (2a_0n + b_0)(x - \beta_n)P_n = k_n P_{n-1}$$

com $n \in \mathbb{Z}^+$. Além disso, se $\{P_n\}$ verifica a equação anterior e uma relação de recorrência a três termos então também verifica $L_n P_n = 0$.

Uma consequência deste resultado consiste na caracterização de McCarthy como mostraremos a seguir:

COROLÁRIO 3.1. *Se $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios mónicos que verificam a condição $L_n P_n = 0$ então*

$$2\phi(\Delta P_{n+1} P_n - P_{n+1} \Delta P_n) = (\lambda_n - \lambda_{n+2} \gamma_{n+1}) P_n^2 + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1}) P_{n+1}^2 + ((x - \beta_n)(2\lambda_{n+1} - \lambda_n - \lambda_{n-1}) - (x - \beta_{n+1})(\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})) P_n P_{n+1}.$$

Demonstração: Sabemos que $\{P_n\}$ verifica $L_n P_n = 0$. Assim, escrevendo (3.10) para $n + 1$, temos

$$(3.11) \quad 2\phi\Delta P_{n+1} + \psi P_{n+1} = -(\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})(x - \beta_{n+1})P_{n+1} + (\lambda_n - \lambda_{n+2})\gamma_{n+1}P_n$$

pelo que, aplicando a relação de recorrência a três termos à igualdade anterior verifica-se que

$$(3.12) \quad 2\phi\Delta P_n + \psi P_n = -(2\lambda_{n+1} - \lambda_n - \lambda_{n-1})(x - \beta_n)P_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1})P_{n+1}.$$

Multiplicando (3.11) por P_n e (3.12) por P_{n+1} e subtraindo a segunda equação obtida pela primeira obtemos a expressão pretendida. ■

Se nas fórmulas obtidas para os coeficientes β_n (3.7) e γ_n (3.8) tomarmos o limite quando h a tender para zero e obtemos as seguintes expressões:

$$(3.13) \quad \beta_n = -\frac{(2na_1 + b_1)}{2a_0n + b_0} + \frac{a_1n(n-1) + nb_1}{a_0(2n-2) + b_0} \frac{2a_0}{2a_0n + b_0}$$

e

$$(3.14) \quad \gamma_n = -\frac{(2a_1(n-1) + \beta_n(-2a_0n - b_0) + b_1p_{1,n} + 4a_0p_{2,n} + 2a_2n)}{-2(2a_0n + b_0)}$$

e verificamos que obtemos os coeficientes da relação de recorrência a três termos dos polinómios ortogonais clássicos Hermite, Laguerre, Jacobi e Bessel.

4. Caso Contínuo

Nesta secção iremos considerar os polinómios ortogonais clássicos, $\{P_n\}$, ou seja, os polinómios de Hermite, Laguerre, Jacobi e Bessel. Estes polinómios estão caracterizados por uma função peso $\omega = \omega(x)$ que é positiva num intervalo $]a, b[$ e que são solução da equação diferencial de primeira ordem do tipo Pearson

$$(\phi\omega)' = \psi\omega$$

	ϕ	ψ	ω	I
H_n	1	$-2x$	e^{-x^2}	\mathbb{R}
L_n^α	x	$\alpha + 1 - x$	$x^{\alpha e^{-x}}$	$[0, \infty[$
$P_n^{\alpha, \beta}$	$1 - x^2$	$-(\alpha + \beta + 2)x + \alpha + \beta$	$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$	$[-1, 1]$
B_n^α	x^2	$(\alpha + 2)x + 2$	$x^\alpha e^{\frac{-2}{x}}$	\mathbb{T}

TABELA 1

onde $\phi = a_0x^2 + a_1x + a_2$ é um polinómio de grau, no máximo, 2, $\psi = b_0x + b_1$ de grau 1, λ_n é uma constante que depende de n e a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 são constantes. Ou seja, a equação de Pearson toma a forma

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{b_0 + b_1x}{a_0x^2 + a_1x + a_2}.$$

e as soluções da equação de Pearson satisfazem a seguinte condição

$$\int x^k d\omega(x) < \infty, \quad k = 0, 1, \dots$$

Consoante o estudo das constantes a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 , obteremos as soluções da equação de Pearson, sendo estas as medidas de ortogonalidade dos polinómios ortogonais clássicos como se pode observar na tabela 1:

Estes polinómios também são solução de uma equação diferencial de segunda ordem do tipo Sturm-Liouville

$$(4.1) \quad \phi P_n'' + \psi P_n' - \lambda_n P_n = 0$$

onde λ_n se obtém por comparação do termo de maior grau desta equação e é dado por $\lambda_n = -n(n-1)a_0 - nb_0$.

Considerando uma qualquer relação de recorrência a três termos, correspondente à sucessão de polinómios ortogonais $\{P_n\}$, podemos encontrar os respectivos coeficientes β_n e γ_n através do resultado seguinte:

TEOREMA 4.1 (Vicente Gonçalves). *Consideremos a equação diferencial de 2ª ordem $L_n P_n = 0$ onde*

$$L_n = \phi D^2 + \psi D + \lambda_n I$$

onde ϕ e ψ estão definidos como anteriormente e D^k é a derivada de ordem k . Para cada n ,

$$\phi(x)P_n''(x) + \psi(x)P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0$$

tem uma única solução polinomial de grau exactamente n se e somente se:

- (1) $E_{0,\xi}^n = 0$ tem $\xi = n$ como única solução em \mathbb{N}
- (2) $E_{0,k}^n \neq 0$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Além disso, as soluções polinomiais mónicas

$$P_n = x^n + p_{1,n}x^{n-1} + p_{2,n}x^{n-2} + \dots$$

de (1.1) verificando 1 e 2 satisfazem a relação de recorrência a três termos

$$xP_n = P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

com condições iniciais $P_0 = 1$, $P_1 = x - \beta_0$ onde

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{(2a_0 - b_0)b_1 - n((n-1)a_0 + b_0)}{(2na_0 + b_0)(2(n-1)a_0 + b_0)} \\ \gamma_{n+1} &= \frac{n + 4a_0 \frac{E_{1,n}^{n+1} E_{1,n+1}^{n+1} + E_{2,n+1}^{n+1} E_{0,n}^{n+1}}{E_{0,n}^{n-1} E_{0,n}^{n+1}} + 2\phi\left(\frac{E_{1,n+1}^{n+1}}{E_{0,n}^{n+1}}\right)}{\lambda_{0,n} - \lambda_{0,n+2}} \end{aligned}$$

e por definição

$$E_{i,\xi}^n = a_i \xi(\xi - 1) + b_i \xi - \lambda_i, n$$

onde a_i e b_i são os coeficientes de $\phi(x)$ e $\psi(x)$ e respectivamente, $\lambda_{i,n} = \lambda_n \delta_{i,0}$ onde $\delta_{i,0}$ é o símbolo de Kronecker.

Considerando ainda os trabalhos de Vicente Gonçalves, a fórmula de Rodrigues pode ser obtida da seguinte forma:

TEOREMA 4.2. Seja $y_n(x)$ uma solução polinomial de

$$\phi(x)P_n''(x) + \psi(x)P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0$$

então

$$y_n = \omega^{-1}(x) \left(\omega(x) \phi^n(x) \left(c_1 + \int_{x_0}^x \frac{N(t)}{\omega(t) \phi^{-1}(t)} dt \right) \right)^{(n)}$$

onde ω é uma solução da equação de Pearson, $\phi(x)$ e $\psi(x)$ definidos como anteriormente, c_1 é uma constante real e N é um polinómio de grau quando muito n .

Para $N \equiv 0$ e $c_1 = 1$ obtemos

$$y = \frac{D^n (\omega(x)\phi^n(x))}{\omega(x)}.$$

que é a *fórmula de Rodrigues* e para os polinómios ortogonais clássicos temos:

$$(1) \text{ Polinómios de Hermite : } H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$(2) \text{ Polinómios de Laguerre: } L_n^\alpha(x) = (n!)^{-1} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}]$$

$$(3) \text{ Polinómios de Jacobi: para } \alpha > -1, \text{ e } \beta > -1$$

$$P_n^{\alpha,\beta} = (-2)^{-n} (n!)^{-1} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}].$$

5. Teorema de Sturm

No estudo dos polinómios ortogonais as propriedades dos seus zeros são fundamentais para melhor os percebermos. No capítulo 1 já analisámos algumas destas propriedades mas para o caso dos polinómios ortogonais que são solução de uma equação do tipo Sturm-Liouville a localização é-nos dada através do teorema de comparação de Sturm.

Nesta secção iremos demonstrar este teorema e veremos a sua aplicação ao caso dos polinómios ortogonais clássicos.

Consideremos a seguinte equação escalar linear e homogénea de 2ª ordem:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

onde $a_1(x)$ e $a_2(x)$ são funções reais de x , contínuas e estão definidas num intervalo $[\alpha, \beta]$. Sejam

$$A(x) = e^{\int_{x_0}^x a_1(t)dt}$$

$$B(x) = a_2(x) e^{\int_{x_0}^x a_1(t)dt}.$$

Com estas condições vamos introduzir um teorema relativo aos zeros das soluções y_1 e y_2 :

TEOREMA 5.1 (Comparação de Sturm). *Sejam $A_1 \geq A_2$ e $B_1 \leq B_2$ em (α, β) , então entre dois zeros de uma solução não nula $y_1(x)$ de*

$$(5.1) \quad \frac{d}{dx} \left[A_1 \frac{dy_1}{dx} \right] + B_1(x)y_1 = 0$$

existe pelo menos um zero de uma solução não nula y_2 de

$$(5.2) \quad \frac{d}{dx} \left[A_2 \frac{dy_2}{dx} \right] + B_2(x)y_2 = 0$$

excepto se, entre dois zeros, $A_1 = A_2$ e $B_1 = B_2$ e se y_1 e y_2 não diferem a menos de um factor constante.

Demonstração: Consideremos o seguinte desenvolvimento da equação

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

onde $a_1(x), a_2(x)$ são funções reais contínuas em $] \alpha, \beta[$. Multiplicando esta equação pelo factor integrante $e^{\int a_1(x)dx}$ obtemos

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int a_1(x)dx} y' \right] + e^{\int a_1(x)dx} (a_2(x)y) = 0$$

ou seja, temos a equação auto-adjunta

$$\frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{dy}{dx} \right] + B(x)y = 0$$

onde

$$A(x) = e^{\int a_1(x)dx} \quad \text{e} \quad B(x) = a_2(x)e^{\int a_1(x)dx}.$$

Como o factor integrante nunca se anula estas equações têm o mesmo conjunto de soluções. Seja $A(x)$ positiva em $] \alpha, \beta[$, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo Integral temos

$$A'(x) = \left(e^{\int_{x_0}^x a_1(t)dt} \right)' = e^{\int_{x_0}^x a_1(t)dt} a_1(x)$$

Logo $A(x)$ tem derivada contínua.

Consideremos duas equações da seguinte forma

$$(5.3) \quad \frac{d}{dx} \left[A_1(x) \frac{dy_1}{dx} \right] + B_1(x) y_1 = 0$$

$$(5.4) \quad \frac{d}{dx} \left[A_2(x) \frac{dy_2}{dx} \right] + B_2(x) y_2 = 0$$

com $A_1(x), A_2(x) > 0$ e $A_1'(x)$ e $A_2'(x)$ são contínuas.

Multiplicando a equação (5.4) por $\frac{y_1^2}{y_2}$ e a equação (5.3) por y_1 e manipulando estas equações obtemos

$$(5.5) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{y_1}{y_2} (-A_2 y_2' y_1 + A_1 y_1' y_2) \right] = (B_2 - B_1) y_1^2 + A_2 \left(y_1' - \frac{y_1}{y_2} y_2' \right)^2 + (A_1 - A_2) y_1^2.$$

Suponhamos que existe um segmento $[\alpha_1, \beta_2] \subset]\alpha, \beta[$ onde se verificam as seguintes condições:

- (1) y_2 não se anula,
- (2) $y_1(\alpha_1) = y_1(\beta_1) = 0$.

Calculando o integral sobre o conjunto $[\alpha_1, \beta_2]$ da equação (5.5) obtemos

$$(5.6) \quad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} ((B_2 - B_1) y_1^2) dx + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (A_1 - A_2) y_1^2 + A_2 \left(y_1' - \frac{y_1}{y_2} y_2' \right)^2 dx.$$

Como $B_2 \geq B_1$ e $A_1 \geq A_2$ sobre $[\alpha_1, \beta_1]$ temos que (5.6) seria positivo o que não pode acontecer. Com $A_1 = A_2$ e $B_1 = B_2$ teríamos $y_1 = y_2$ e y_2 anular-se-ia nos extremos do segmento o que é uma contradição, pois por hipótese y_2 não se anula.

Conclui-se então que se tem $y_2(\xi) = 0$ para algum $\xi \in [\alpha_1, \beta_2]$. ■

Este resultado pode ser aplicado aos polinómios ortogonais clássicos como iremos ver nos seguintes exemplos:

EXEMPLO 5.1. Os polinómios de Jacobi $P_n^{\alpha, \beta}$ satisfazem a seguinte equação diferencial de segunda ordem do tipo Sturm-Liouville:

$$(5.7) \quad (1 - x^2)(P_n^\lambda)'' - (2\lambda + 1)x(P_n^\lambda)' + n(n + 2\lambda)P_n^\lambda = 0$$

onde $\alpha = \beta = \lambda + \frac{1}{2}$ e $0 < \lambda < 1$.

Esta equação tem os seus zeros compreendidos entre -1 e 1 . Fazendo uma mudança de variável $x = \cos \theta$ resulta que $z = (\sin \theta)^\lambda P_n^\lambda(\cos \theta)$. Sabemos que a medida de ortogonalidade destes polinómios é $\omega(x) = (1 - x^2)^{\frac{\lambda}{2}}$ e substituindo

$$(1 - x^2)^{\frac{\lambda}{2}} = (\sin \theta)^\lambda$$

verificamos que P_n^λ é ortogonal relativamente a $(\sin \theta)^\lambda$.

Voltando à equação diferencial (5.7) fazemos a mudança de variável indicada temos a respectiva equação auto adjunta

$$z'' + \left[(n + \lambda)^2 + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{\sin \theta} \right] z = 0$$

e aplicando o Teorema de Sturm temos

$$z'' + (n + \lambda^2)z = 0$$

ou seja, $P_n^\lambda(\cos \theta)$ tem um zero no intervalo $\left(\frac{(k-1)\pi}{n+\lambda}, \frac{k\pi}{n+\lambda} \right)$ para $k = 2, 3, \dots, n$.

Vemos directamente que existe um zero no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{n+\lambda} \right)$ e como

$$P_n^\lambda(-x) = (-1)^n P_n^\lambda(x)$$

temos que os zeros $\theta_k = \pi - \theta_{n-1-k}$ logo

$$\left(\frac{k - (1 - \lambda)\pi}{k\pi} n + \lambda \right).$$

Consideremos o caso dos polinómios de Hermite

EXEMPLO 5.2. Consideremos a seguinte equação escalar

$$y'' - 2xy' + 2\mu y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right) + 2\mu e^{-x^2} y = 0$$

então existe uma solução não nula

$$y'(x) = y'(0) + 2xy(x) - 2(\mu + 1) \int_0^x y(t) \, dt.$$

Deduzimos que se y satisfaz esta condição, temos também $|y| < Ke^{kx^2}$ com $k_1 < k < \frac{1}{2}$ donde resulta que y' é integrável e de quadrado integrável para a medida e^{-x^2} .

Os polinômios de Hermite, de grau n são solução da equação

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H'_n \right) + 2n e^{-x^2} H_n = 0$$

e por comparação temos

$$(\mu - n) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} y(x) H_n(x) \, dx = 0.$$

Portanto, se μ não é um inteiro, os coeficientes do desenvolvimento de y em série de polinômios são todos nulos e y seria nulo. Logo temos que ter $\mu = n$ e as soluções pretendidas são o produto de H_n por uma constante.

Para os polinômios de Laguerre temos:

EXEMPLO 5.3. Estes polinômios verificam a seguinte equação:

$$xy'' + (1 - x)y' + \mu y = 0$$

quando $\mu = n$ e $n = 0, 1, \dots$ existem soluções não nulas tais que

$$\lim_{x \rightarrow 0} xy'(x) = 0$$

onde $|y(x)| \leq K e^{kx}$ para $x > 1$ com $0 > k > \frac{1}{2}$. Logo y é integrável e de quadrado integrável.

)

CAPÍTULO IV

Polinómios Ortogonais Clássicos Co-Recursivos

O objectivo principal deste capítulo consiste em encontrar a família generalizada de polinómios ortogonais clássicos co-recursivos.

Começaremos com uma breve introdução aos conceitos de polinómios co-recursivos e de mudança afim na variável. Depois encontraremos uma relação entre as derivadas de primeira ordem e os polinómios associados de P_n . Partindo das funções de segunda espécie q_n e da equação diferencial de segunda ordem de Sturm-Liouville,

$$L_n = \phi D^2 + (2\phi' - \psi)D + (\lambda_n + \phi'' - \psi')I$$

chegaremos então à seguinte relação

$$L_n^* P_{n-1}^{(1)}(x) = 2(a_0 - b_0)P_n'(x).$$

Esta relação é mais geral do que a de Sturm-Liouville anteriormente considerada e irá permitir-nos encontrar uma família de polinómios mais geral que designaremos por $\{\mathcal{P}_n\}$. Esta nova família de polinómios ortogonais verifica uma relação de recorrência a três termos e os respectivos coeficientes serão designados por δ_n e ν_n .

Estes coeficientes têm grande importância pois através deles conseguimos estender os resultados conhecidos sobre os clássicos para famílias de polinómios ortogonais mais gerais, como é o caso dos polinómios ortogonais co-recursivos.

Conseguimos relacionar estes polinómios com os clássicos da seguinte forma

$$\mathcal{P}_n(x) = P_n^{(c)}(ax + b; d)$$

e as expressões de a, b, c, d serão encontradas em função dos parâmetros livres α, β, δ_0 e ν_1 . Para isso usaremos a transformação afim para relacionar as expressões de β_n e γ_n dadas pela tabela 2 e as expressões de ν_n e δ_n dadas pela tabela 3 fazendo

$$\delta_{n+1} = \frac{\beta_{n+c} - b}{a}, \quad \nu_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1+c}}{a^2}, \quad \delta_0 = \beta_0 - d.$$

No final apresentaremos as medidas de ortogonalidade dos polinómios ortogonais clássicos obtidas por Askey e Wimp em [3], Bustoz e Ismail em [9] onde utilizaram nos seus trabalhos o método usado por Pollaczek que descrevemos no Capítulo II. Introduziremos, também, a transformada de Stieltjes associada aos polinómios co-recursivos como foi feito em [21] por Dehesa, Marcellán e Ronveaux.

1. Polinómios Ortogonais Co-Recursivos

Começaremos por introduzir o conceito de mudança afim na variável e encontraremos a relação de recorrência a três termos correspondente. Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos. Diz-se que R_n é uma *transformação afim de P_n* se existirem parâmetros reais a, b com $a \neq 0$ tais que

$$R_n(x) = a^{-n} P_n(ax + b).$$

Fazendo a mudança de variável $x = ax + b$ na relação de recorrência a três termos de $\{P_n\}$

$$xP_n = P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}$$

e tendo em conta que

$$\frac{1}{a^{n+1}} P_{n+1}(ax + b) = R_{n+1}(x),$$

resulta

$$\frac{1}{a^{n+1}} P_{n+1}(ax + b) = \frac{(ax + b) - \beta_n}{a^{n+1}} P_n(ax + b) - \frac{\gamma_n}{a^{n+1}} P_{n-1}(ax + b)$$

ou seja, obtemos a relação de recorrência a três termos para R_n :

$$xR_n(x) = R_{n+1}(x) + \frac{\beta_n - b}{a} R_n(x) + \frac{\gamma_n}{a^2} R_{n-1}(x).$$

Em relação à co-recursividade temos que $\{P_n(x; d)\}$ é uma *sucessão de polinómios ortogonais mónicos co-recursivos* quando se expressam como combinação linear da sucessão $\{P_n\}$ e dos seus associados de ordem um da seguinte forma

$$P_n(x; d) = P_n(x) - dP_{n-1}^{(1)}.$$

A partir desta equação encontramos a relação de recorrência a três termos que $\{P_n(x; d)\}$ satisfaz e que tem a seguinte forma:

$$xp_n(x; d) = P_{n+1}(x; d) + \beta_{n+1}P_n(x; d) + \gamma_{n+1}P_{n-1}(x; d)$$

com condições iniciais $P_0(x; d) = 0$ e $P_1(x; d) = P_1(x) - d$.

Para obtermos uma relação entre os polinómios associados de primeira ordem $P_n^{(1)}$ e P'_n começamos por considerar as funções de segunda espécie q_n que estão associadas às soluções polinomiais da equação (4.1), que são definidas por:

$$(1.1) \quad q_n(x) = \frac{1}{\int_I \omega(t)dt} \int_a^b \frac{P_n(t)\omega(t)}{x-t} dt$$

e que satisfazem a equação

$$(1.2) \quad [\phi D^2 + (2\phi' - \psi)D + (\lambda_n + \phi'' - \psi')I] q_n = 0.$$

Estas funções satisfazem a mesma relação de recorrência que P_n como mostraremos a seguir. Consideremos a relação de recorrência

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x).$$

Multiplicando ambos os membros da relação anterior por $\frac{\omega}{t-x}$ vem

$$\frac{xP_n\omega}{t-x} = \frac{p_{n+1}\omega}{t-x} + \frac{\beta_n P_n\omega}{t-x} + \frac{\gamma_n P_{n-1}\omega}{t-x}$$

integrando cada membro no intervalo $[a, b]$ e tendo em conta que $\frac{x}{t-x} = \frac{t}{t-x} - 1$ temos

$$\begin{aligned} - \int \frac{P_n(x)\omega(x)}{t-x} dx + \int \frac{t}{t-x} P_n(x)\omega(x) dx &= \int \frac{p_{n+1}(x)\omega(x)}{t-x} dx + \beta_n \int \frac{P_n(x)\omega(x)}{t-x} dx \\ &\quad + \gamma_n \int \frac{P_{n-1}(x)\omega(x)}{t-x} dx. \end{aligned}$$

Aplicando a definição de q_n (1.1) temos a relação de recorrência pretendida

$$tq_n(t) = q_{n+1}(t) + \beta_n q_n(t) + \gamma_n q_{n-1}(t).$$

Pela equação (1.2) e pela definição das funções de segunda espécie q_n obtemos uma relação entre as derivadas de P_n e os seus polinómios associados de primeira

ordem $P_n^{(1)}$, para isso começaremos por calcular a primeira e a segunda derivadas de q_n , que são definidas por:

$$q'_n(x) = - \int \frac{P_n(t)\omega(t)}{(x-t)^2} dt \quad \text{e} \quad q''_n(x) = 2 \int \frac{P_n(t)\omega(t)}{(x-t)^3} dt.$$

Existe uma relação entre as derivadas de $q_0(x)$ e $q_0(x)$ e a partir dela chegaremos aos resultados pretendidos. A partir da equação de Pearson $\phi(x)\omega'(x) = (\psi(x) - \phi'(x))\omega(x)$ e dividindo-a por $x - t$ e depois primitivando-a em ordem a t temos

$$\begin{aligned} \int \phi(t) \frac{\omega'(t)}{x-t} dt &= \int \frac{\psi(t) - \phi'(t)}{x-t} dt \\ \phi'(x)q_0(x) &= (\psi(x) - \phi'(x))q_0(x) + (a_0 - b_0). \end{aligned}$$

Resulta assim que q_0 verifica uma equação diferencial linear de 1ª ordem com coeficientes polinomiais

$$(1.3) \quad \phi q'_0(x) = (\psi - \phi')q_0(x) + (a_0 - b_0)$$

Derivando a equação anterior obtemos

$$(1.4) \quad \phi(x)q''_0(x) = (\psi'(x) - \phi''(x))q_0(x) + (\psi(x) - 2\phi'(x))q'_0(x).$$

Na definição de q_n , (1.1), temos que somando e subtraindo por $P_n(x)$ vem

$$\begin{aligned} q_n(x) &= - \int \frac{P_n(t) - P_n(x)}{x-t} \omega(t) dt + \int \frac{P_n(x)}{x-t} \omega(t) dt \\ q_n(x) &= -P_{n-1}^{(1)}(x) + P_n(x)q_0(x) \end{aligned}$$

onde $P_0(x) = 1$.

Aplicando o operador

$$L_n = \phi D^2 + (2\phi' - \psi)D + (\lambda_n + \phi'' - \psi')I$$

na equação anterior obtemos $L_n q_n(x) = 0$

$$\begin{aligned} q_0(x) [(\phi P_n''(x) + \psi P_n'(x) + \lambda P_n(x)) - 2\psi P_n'(x) + 2\phi' P_n'(x) + \phi'' P_n(x) - \psi' P_n(x)] \\ + q'_0(x) (2\phi P_n'(x) + (2\phi' - \psi)P_n(x)) + q''_0(x) P_n(x)\phi + -L_n P_{n-1}^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

Pela equação de Sturm-Liouville e por (1.4) obtemos

$$-L_n P_{n-1}^{(1)}(x) + 2(\phi' - \psi)q_0(x)P_n'(x) + 2\phi q'_0(x)P_n'(x) = 0$$

e através de (1.3) resulta que

$$L_n P_{n-1}^{(1)}(x) = 2(a_0 - b_0)P_n'(x).$$

Podemos assim estabelecer o seguinte resultado:

TEOREMA 1.1. *Se $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos clássica então*

$$L_n^* P_{n-1}^{(1)}(x) = 2(a_0 - b_0)P_n'(x)$$

onde

$$L_n^* = \phi D^2 + (2\phi' - \psi)D + (\lambda_n + \phi'' - \psi')I$$

e $\phi = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ é um polinómio de grau no máximo dois, $\psi = b_0 x + b_1$ e λ_n é uma constante que depende de n , como foi definido no capítulo 1.

2. Problema Principal

Na secção anterior concluímos que a sucessão de polinómios ortogonais mónicos, $\{P_n\}$, verifica uma relação do tipo

$$(2.1) \quad L_n^* P_{n-1}^{(1)}(x) = 2(a_0 - b_0)P_n'(x)$$

onde $L_n^* = \phi D^2 + (2\phi' - \psi)D + (\lambda_n + \phi'' - \psi')I$.

O estudo desta sucessão de polinómios foi realizado por Branquinho e Foulquié Moreno, em [5]. Neste trabalho foi provado que as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicos verificam uma relação do tipo (2.1) e conclui-se que esta equação é mais geral do que a equação de Sturm-Liouville considerada anteriormente e através dela obtemos uma sucessão de polinómios ortogonais mais geral que designaremos por $\{\mathcal{P}_n\}$ e que corresponderá à família de polinómios ortogonais co-recursivos e também determinaremos os coeficientes, δ_n e ν_n , da relação de recorrência a três termos que estes verificam. Iremos classificá-los em quatro classes e que por analogia ao caso clássico iremos designá-las por \mathcal{H}_n , $\mathcal{L}_n^{\alpha_1}$, $\mathcal{P}_n^{\alpha_1, \beta_1}$ e $\mathcal{B}_n^{\alpha_1}$.

Obteremos uma relação entre os polinómios clássicos e esta nova família de polinómios ortogonais da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_n(x) = P_n^{(c)}(ax + b; d).$$

Os polinómios clássicos verificam uma relação de recorrência a três termos com coeficientes β_n , γ_n e com parâmetros α e β . Os novos polinómios também satisfazem uma relação de recorrência mas com coeficientes δ_n e ν_n mas com parâmetros α_1 , β_1 . As expressões de a, b, c e d obtêm-se através das seguintes relações

$$\delta_{n+1} = \frac{\beta_{n+c} - b}{a}, \quad \nu_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1+c}}{a^2}, \quad \delta_0 = \beta_0 - d.$$

com parâmetros livres α , β , δ_0 e ν_1 .

3. Polinómios Ortogonais Co-Recursivos dos Clássicos

O resultado seguinte permite determinar a expressão geral dos coeficientes da relação de recorrência a três termos da sucessão de polinómios ortogonais $\{\mathcal{P}_n\}$ que verificam a equação (2.1).

TEOREMA 3.1. *Se $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos que satisfaz uma equação de Sturm-Liouville, então os coeficientes da relação de recorrência a três termos correspondente a sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{\mathcal{P}_n\}$ que verificam (2.1) são dados por*

$$(3.1) \quad \beta_{n+1} = \frac{-2a_1(n+1)(na_0 + b_0) + (b_1 - 2(a_0 - b_0)\beta_0)b_0}{(2(n+1)a_0 + b_0)(2na_0 + b_0)}$$

$$(3.2) \quad \gamma_{n+2} = -\frac{((n+1)a_0 + b_0)(n+1)a_2 + (a_0^2 - b_0^2)\gamma_1}{((2n+3)a_0 + b_0)((2n+1)a_0 + b_0)} + v_n \frac{(n+1)(-(n+2)a_1 + b_1 - 2(a_0 - b_0)\beta_0)}{((2n+3)a_0 + b_0)((2n+2)a_0 + b_0)^2((2n+1)a_0 + b_0)}$$

onde

$$v_n = -((2n+1)a_0 + b_0)a_1b_0 + (((n+1)a_0 + b_0)(2(a_0 - b_0)\beta_0 + b_1) - n(n+1)a_0a_1)a_0$$

Demonstração: Em Chihara [13] temos que

$$P_{n-1}^{(1)}(x) = x^{n-1} - A_n x^{n-2} + B_n x^{n-3} + \dots$$

$$P_n(x) = x^n - (A_n + \beta_0)x^{n-1} + (B_n + \beta_0 A_n - \gamma_1)x^{n-2} + \dots$$

onde $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$ e $B_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \beta_i \beta_j - \sum_{k=2}^{n-1} \gamma_k$. Para encontrarmos as expressões de A_n e de B_n vamos comparar os coeficientes de x^{n-2}, x^{n-3} de

$$(3.3) \quad L_n^*(x^{n-1} - A_n x^{n-2} + B_n x^{n-3} + \dots) = 2(a_0 - b_0)P_n'(x)$$

onde $L_n^* = \phi D^2 + (2\phi' - \psi)D + (\lambda_n + \phi'' - \psi')I$. O coeficiente do termo em $[x^{n-2}]$ é o seguinte:

$$\begin{aligned} & a_0(-A_n(n-2)(n-3)) + a_1(n-2)(n-1) + (4a_0 - b_0)(-A_n)(n-2) + \\ & + 2(2a_1 - b_1)(n-1) + (-n(n-1)a_0 - nb_0 + 2a_0 - b_0)(-A_n) = -2(a_0 - b_0)(A_0 - \beta_0)(n-1) \end{aligned}$$

e daqui resulta que

$$(3.4) \quad A_n = \frac{(n-1)((b_1 - a_1n) + 2\beta_0(a_0 - b_0))}{2((n-1)a_0 + b_0)}.$$

relativamente ao coeficiente do termo em $[x^{n-3}]$ temos

$$\begin{aligned} & (-a_1n^2 + 3na_1 - 2a_1 + b_1n - 2b_1 - 2(a_0 - b_0)(n-2)\beta_0) A_n \\ & + (-4a_0n + 6a_0 - 2b_0) B_n = -a_2(n-2)(n-1) - 2(a_0 - b_0)(n-2)\gamma_1 \end{aligned}$$

e vem B_n é dado por

$$\begin{aligned} (3.5) \quad B_n = & \frac{a_2(n-2)(n-1) + 2(a_0 - b_0)(n-2)\gamma_1}{2((2n-3)a_0 + b_0)} \\ & + \frac{a_1(n^2 + 3n - 2) + b_1(n-2) - 2(a_0 - b_0)(n-2)\beta_0}{2((2n-3)a_0 + b_0)} A_n \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Derivando a relação de recorrência a três termos

$$(3.6) \quad xP_n = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

temos $P_n = P'_{n+1} - (x - \beta_n)P'_n + \gamma_n P'_{n-1}$. Multiplicando esta equação por $2(a_0 - b_0)$ e aplicando a equação (2.1) conclui-se

$$\begin{aligned} 2(a_0 - b_0)P_n &= L_{n+1}^* P_n^{(1)} - (x - \beta_n)L_n^* P_{n-1}^{(1)} + \gamma_n L_{n-1}^* P_{n-2}^{(1)} \\ &= L_n^* \left(P_n^{(1)} - (x - \beta_n)P_{n-1}^{(1)} + \gamma_n P_{n-2}^{(1)} \right) + 2\phi \left(P_{n-1}^{(1)} \right)' \\ &\quad + (2\phi' - \psi)P_{n-1}^{(1)} - (2na_0 + b_0)P_n^{(1)} + (2(n-1)a_0 + b_0)\gamma_n P_{n-2}^{(1)}. \end{aligned}$$

Logo, tendo em conta que $\{P_n\}$ satisfaz uma relação de recorrência a três termos como em (3.6) temos

$$(3.7) \quad \begin{aligned} 2(a_0 - b_0)P_n &= 2\phi \left(P_{n-1}^{(1)} \right)' + (2\phi' - \psi)P_{n-1}^{(1)} \\ &\quad - (2na_0 + b_0)P_n^{(1)} + (2(n-1)a_0 + b_0)\gamma_n P_{n-2}^{(1)} \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos termos em x^{n-1} e x^{n-2} de (3.7) resulta que

$$(3.8) \quad \beta_{n+1} = -\frac{-2a_0 A_{n+1} + 2(n+1)a_1 - b_1 + 2(a_0 - b_0)\beta_0}{2(n+1)a_0 + b_0}$$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \gamma_{n+2} &= \frac{4a_0 B_{n+2} - 2(a_0 - b_0)\gamma_1 - 2(n+1)a_2}{2((2n+3)a_0 + b_0)} \\ &\quad + \frac{2(a_0 - b_0)\beta_0 + 2(n+1)a_1 - b_1 + (2(n+2)a_0 + b_0)\beta_{n+2}}{2((2n+3)a_0 + b_0)} A_{n+2} \end{aligned}$$

Apenas nos resta substituir nas equações (3.8) e (3.9) as expressões de A_n e B_n que são dados por (3.4) e por (3.5), respectivamente chegando deste modo ao resultado pretendido. ■

Consideremos as expressões canónicas de ϕ e de ψ , dadas pela tabela 1 do capítulo 1, e consideremos os correspondentes valores de β_0 e de γ_1 , para o caso clássico que são dados pela tabela 2.

Se substituirmos estes valores nas expressões de (3.1) e (3.2) obtemos os valores para β_n e γ_{n+1} apresentados na tabela 1 que irão coincidir com os coeficientes da relação de recorrência a três termos das sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicos, ou seja, os resultados obtidos a partir do Teorema 3.1 são consistentes com os resultados conhecidos para as sucessões de polinómios ortogonais clássicos. Na

	β_n	γ_{n+1}
H_n	0	$\frac{n+1}{2}$
L_n^α	$2n + \alpha + 1$	$(n+1)(n+\alpha+1)$
$P_n^{\alpha,\beta}$	$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$\frac{4(n+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)^2(2n+\alpha+\beta+3)}$
B_n^α	$\frac{-2\alpha}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)}$	$\frac{-4(n+1)(n+\alpha+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)^2(2n+\alpha+3)}$

TABELA 1

	δ_{n+1}	ν_{n+1}
\mathcal{H}_n	$2\beta_0$	$\frac{n}{2} + \gamma_1$
\mathcal{L}_n^α	$2n - \alpha - 1 + 2\beta_0$	$n(n - \alpha + 2\beta_0) + \gamma_1$
$\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$	$\frac{(\beta+\alpha+2)(\alpha-\beta+2(1+\alpha+\beta)\beta_0)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$\frac{4n(2+\alpha+\beta+n)(1+\beta+n-(1+\alpha+\beta)\beta_0)(1+\alpha+n+((1+\alpha+\beta)\beta_0))}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2+2n)^2} +$ $\frac{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)\gamma_1}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+3)}$
\mathcal{B}_n^α	$\frac{2(2+\alpha)(1+(1+\alpha)\beta_0)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)}$	$\frac{-4n(n+\alpha+2)(1+(\alpha+1)\beta_0)^2}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)^2(2n+\alpha+3)} +$ $\frac{(3+\alpha)(\alpha+1)\gamma_1}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+3)}$

TABELA 2

tabela 2 estão apresentados os resultados obtidos quando substituímos as expressões canônicas de ϕ e de ψ em (3.1) e em (3.2).

4. Estudo das soluções do problema inicial

Como vimos anteriormente as sucessões de polinómios ortogonais clássicos são solução de uma equação de Sturm-Liouville. Existe nova uma sucessão de polinómios $\{\mathcal{P}_n\}$ que satisfazem a equação

$$\phi(\mathcal{P}_{n-1}^{(1)})'' + (2\phi' - \psi)(\mathcal{P}_{n-1}^{(1)})' - (\lambda_n - \phi'' + \psi')\mathcal{P}_{n-1}^{(1)} = 2(a_0 - b_0)(\mathcal{P}_n)'.$$

Como sabemos os polinómios ortogonais clássicos verificam uma relação de recorrência a três termos com coeficientes β_n e γ_n e com parâmetros α e β . Os novos polinómios também satisfazem uma relação de recorrência mas com coeficientes δ_n e ν_n :

$$x\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n+1} + \delta_n\mathcal{P}_n + \nu_n\mathcal{P}_{n-1}$$

mas com parâmetros α' e β' .

Consideremos a tabela 2 onde apresentamos os coeficientes β_n e γ_n da relação de recorrência correspondente aos polinómios ortogonais clássicos e na tabela 3 temos os coeficientes δ_n e ν_n relativos aos novos polinómios \mathcal{P}_n . Por analogia ao caso clássico designámo-las por \mathcal{H}_n , $\mathcal{L}_n^{\alpha_1}$, $\mathcal{P}_n^{\alpha_1, \beta_1}$ e $\mathcal{B}_n^{\alpha_1}$.

Podemos obter uma relação entre estas duas famílias de polinómios da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_n = P_n^{(c)}(ax + b; d)$$

onde α , β , δ_0 e ν_1 são parâmetros livres.

4.1. Caso \mathcal{H}_n . Vamos encontrar a relação existente entre os polinómios de Hermite e os novos polinómios $\{\mathcal{H}_n\}$. Através da transformação afim na variável da relação de recorrência a três termos dos polinómios de Hermite, comparando as expressões de β_n e de γ_n dos polinómios \mathcal{H}_n com as expressões de ν_n e de δ_n dos polinómios \mathcal{H}_n obtemos a, b, c e d em termos de δ_0, ν_1 como mostraremos a seguir.

Igualando as expressões de β_n e δ_{n+1} dadas pelas tabelas 2 e 3, respectivamente, temos:

$$(4.1) \quad \delta_{n+1} = \frac{\beta_{n+c} - b}{a} \Leftrightarrow 2\delta_0 = \frac{-b}{a}$$

e fazendo o mesmo para as expressões de γ_{n+1} e ν_{n+1} temos: $\nu_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1+c}}{a^2}$, ou seja,

$$(4.2) \quad \frac{n}{2} + \nu_1 = \frac{\frac{n+c+1}{2}}{a^2}$$

obtemos

$$\nu_1 = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \frac{c+1}{2a^2}.$$

Como $\left(\frac{1}{a} - 1 \right)$ tem de ser 0 resulta que $a = \pm 1$. Substituindo este valor em (4.1) obtemos $b = \pm 2\delta_0$.

Voltando à equação (4.2) e substituindo o valor de a obtido anteriormente temos c em função de ν_1 : $c = 2\nu_1 - 1$. Falta-nos apenas o valor do parâmetro d e que se obtêm da seguinte forma:

$$2\delta_0 - d = \delta_0 \quad \Leftrightarrow \quad d = \delta_0.$$

Deste modo obtemos uma relação entre esta nova sucessão de polinómios $\{\mathcal{H}_n\}$ e os polinómios de Hermite:

$$\mathcal{H}_n = H^{(c)}(\pm(x - 2\delta_0); \delta_0)$$

onde $H^{(c)}(x; d)$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos co-recursiva de Hermite.

4.2. Caso $\mathcal{L}_n^{\alpha_1}$. Para os polinómios de Laguerre o processo será idêntico ao utilizado nos polinómios de Hermite.

Encontraremos a relação

$$\mathcal{L}_n^{\alpha_1} = (L_n^\alpha)^{(c)}(ax + b; d)$$

de modo a determinar a, b, c, d, α em função de δ_0 e ν_1 que são parâmetros livres e α_1 que é um valor inicial.

Comparando as expressões de δ_{n+1} com a expressão de β_n relativa a L_n^α obtemos a seguinte igualdade

$$\delta_{n+1} = \frac{\beta_{n+c} - b}{a} \Leftrightarrow 2n - (\alpha_1 + 1) + 2\delta_0 = \frac{2(n+c) + \alpha + 1 - b}{a}$$

resultando directamente $a = 1$ e $b = 0$.

Desta expressão resulta que

$$(4.3) \quad \alpha = 2\delta_0 - 2c - \alpha_1 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha_1 + 2\delta_0 + \alpha = 2(c + \alpha + 1)$$

Comparando as expressões de γ_{n+1} , com a expressão de ν_{n+1} temos

$$\nu_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1+c}}{a^2} \Leftrightarrow n(n - \alpha_1 + 2\delta_0) + \nu_1 = \frac{(n + c + 1)(n + c + \alpha + 1)}{a^2}$$

$$\text{como } a = 1 \text{ vem} \quad n(n - \alpha_1 + 2\delta_0) + \nu_1 = (n + c + 1)(n + c + \alpha + 1)$$

por (4.3)) obtemos a expressão de c

$$(4.4) \quad c = \frac{2\nu_1}{-\alpha_1 + 2\delta_0 + \alpha} - 1.$$

Substituindo esta expressão em (4.3) obtemos dois valores para α

$$\alpha = \pm \sqrt{(\alpha_1 - 2\delta_0)^2 - 4\nu_1}.$$

Quando substituirmos estes valores em (4.4) obtemos as expressões para c em termos de α_1, δ_0 e de ν_1 :

$$c = -1 + \frac{2\nu_1}{\pm \sqrt{(\alpha_1 - 2\delta_0)^2 - 4\nu_1} - \alpha_1 + 2\delta_0}.$$

Falta apenas determinar o valor de d : temos

$$\delta_0 = \delta_0 - (1 + \alpha_1) - d \quad \Leftrightarrow \quad d = \delta_0 - (1 + \alpha_1)$$

obtendo deste modo os polinómios co-recursivos dos polinómios de Laguerre.

4.3. Caso $\mathcal{P}_n^{\alpha_1, \beta_1}$. De modo análogo ao que fizemos para os polinómios de Hermite e Laguerre vamos encontrar as expressões de a, b, c, d, α_1 e β_1 em termos de α, β, δ_0 e ν_1 .

Começando por considerar as expressões dos β_n e dos γ_{n+1} das tabelas 2 e as expressões de ν_{n+1} e δ_{n+1} dadas pela tabela 3 e fazendo a mudança afim na variável da expressão de β_n temos a seguinte relação:

$$\frac{(2 + \alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1 + 2(1 + \alpha_1 + \beta_1)\delta_0)}{(2n + \alpha_1 + \beta_1)(2 + \alpha_1 + \beta_1 + 2n)} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{a} - b$$

e de imediato temos que $a = 1$ e $b = 0$. A expressão fica da seguinte forma

$$\frac{(2 + \alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1 + 2(1 + \alpha_1 + \beta_1)\delta_0)}{(2n + \alpha_1 + \beta_1)(2 + \alpha_1 + \beta_1 + 2n)} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + 2c + \alpha + \beta)(2 + 2c + 2n + \alpha + \beta)}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador obtemos

$$\begin{aligned} & (2 + \alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1 + 2(1 + \alpha_1 + \beta_1)\delta_0)(4n^2 + n(8c + 4\alpha + 4\beta + 4)) + \\ & + 4c^2 + 4c\beta + 4c + 4c\alpha + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha + \beta^2 + 2\beta = \\ & = (\beta^2 - \alpha^2)(4n^2 + n(4 + 4\beta_1 + 4\alpha_1) + (\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_1 + \beta_1^2 + 2\beta_1)) \end{aligned}$$

e comparando os coeficientes dos termos em n obteremos o valor de c .

Começaremos por comparar o coeficiente do termo em $[n^2]$:

$$(4.5) \quad (2 + \alpha_1 - \beta_1 + 2(1 + \alpha_1 + \beta_1)\delta_0) = \beta^2 - \alpha^2.$$

Relativamente ao coeficiente do termo em $[n]$:

$$(2 + \alpha_1 - \beta_1 + 2(1 + \alpha_1 + \beta_1)\delta_0)(8c + 4\alpha + 4\beta + 4) = (\beta^2 - \alpha^2)(4 + 4\alpha_1 + 4\beta_1)$$

e utilizando (4.5) temos

$$2c + \alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{\alpha_1 - \alpha - \beta + \beta_1}{2}$$

Comparando os termos independentes obtemos a expressão (4.3). Substituindo esta expressão em (4.5) obtemos

$$(4.6) \quad \beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2 + 2c + \alpha + \beta} - 2\delta_0(1 + \alpha + \beta + 2c).$$

Do mesmo modo vamos comparar os coeficientes dos termos em $[n]$ da relação existente entre as expressões de γ_{n+1} e de ν_{n+1} , considerando $a = 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{4n(2 + \alpha_1 + \beta_1 + n)(1 + \beta_1 + n - (1 + \alpha_1 + \beta_1)\delta_0)(1 + \alpha_1 + n + (1 + \alpha_1 + \beta_1)\delta_0)}{(1 + \alpha_1 + \beta_1 + 2n)(2 + \alpha_1 + \beta_1 + 2n)^2(3 + \alpha_1 + \beta_1 + 2n)} \\ & + \frac{(1 + \alpha_1 + \beta_1)(3 + \alpha_1 + \beta_1)\gamma_1}{(1 + \alpha_1 + \beta_1 + 2n)(3 + \alpha_1 + \beta_1 + 2n)} = \\ & \frac{4(1 + n + c)(1 + n + c + \beta)(1 + n + c + \alpha)(1 + n + c + \alpha + \beta)}{(2n + 2c + 1 + \alpha + \beta)^2(3 + 2n + 2c + \alpha + \beta)} \end{aligned}$$

reduzindo ao mesmo denominador e por (4.3) resulta

$$\begin{aligned} & 4n(n + 2c + 2 + \alpha + \beta)(1 + \beta_1 + n - (1 + \alpha + \beta + 2c)\delta_0)(1 + \alpha_1 + n + (1 + \alpha_1 + \\ & \beta_1)\delta_0) + (1 + \alpha + \beta + 2c)(3 + \alpha + \beta + 2c)(2n + 2c + 2 + \alpha + \beta)^2 = \\ & = 4(n + 1 + c)(1 + n + c + \alpha)(1 + n + c + \beta)(1 + n + c + \beta + \alpha) \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos termos em $[n^2]$, temos

$$\begin{aligned} & 1 + 2c + \alpha + \beta + \alpha_1\beta_1 + (2 + 2c + \alpha + \beta)^2 + \delta_0(\beta_1 - \alpha_1)(1 + 2c + \alpha + \beta) \\ & - 2\delta_0^2(1 + 2c + \alpha + \beta)^2 + \nu_1(1 + 2c + \alpha + \beta)(3 + 2c + \alpha + \beta) = (2 + c + c^2 + \alpha(1 + c)) \\ & (2 + 2c + \alpha)(1 + 2c + \alpha + 2\beta) + (1 + 2c + c^2 + \alpha(c + 1) + \beta(2 + 2c + \alpha + \beta)) \end{aligned}$$

e em relação aos coeficientes dos termos em $[n]$

$$\begin{aligned} & (2 + 2c + \alpha + \beta)(1 + 2c + \alpha + \beta + \alpha_1\beta_1 + \delta_0((1 + 2c + \alpha + \beta)(\beta_1 - \alpha_1) - \delta_0^2((1 + 2c + \alpha + \beta)^2))) \\ & + \nu_1(1 + 2c + \alpha + \beta)(3 + 2c + \alpha + \beta)(2 + 2c + \alpha + \beta) = \\ & (2 + 2c + \alpha)(1 + 2c + c^2 + \alpha(1 + c + \beta) + \beta(2 + 2c + \beta)) + (c(1 + c + \alpha) + \alpha + 2)(2 + 2c + \alpha + 2\beta). \end{aligned}$$

Utilizámos as igualdades (4.3) e (4.6) para concluir que estes dois coeficientes são iguais. Quanto ao termo independente a sua expressão é a seguinte:

$$\begin{aligned} & \nu_1(1 + 2c + \alpha + \beta)(3 + 2c + \alpha + \beta)(4 + c(4c + 4\alpha + 4\beta + 8) + \alpha(\alpha + 2\beta + 4) + \beta(\beta + 4)) \\ & 4(2 + c(c + \alpha + 1) + \alpha)(c(c + \alpha + 2\beta + 2) + \beta(2 + \alpha + \beta) + \alpha + 1) \end{aligned}$$

e obtemos $\gamma_1^{(c)} = \gamma_1$.

A expressão relativa a d é dada por:

$$d = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2)} - \delta_0.$$

Temos assim os polinómios de Jacobi co-recursivos

$$\mathcal{P}_n^{\alpha_1, \beta_1} = (P_n^{\alpha, \beta})^{(c)} \left(x; \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2)} - \delta_0 \right).$$

4.4. Caso \mathcal{B}_n^α . Considerando as expressões dos β_n e dos γ_{n+1} das tabelas 2 e as expressões de δ_{n+1} e ν_{n+1} da tabela 3 e os coeficientes da transformação afim na variável, vamos comparar estes coeficientes de modo a obtermos as expressões de a, b, c, d e de α em termos de α_1, δ_0 e ν_1 .

Considerando as expressões

$$\delta_{n+1} = \frac{\beta_{n+1+c} - b}{a} \Leftrightarrow \frac{2(\alpha_1 + 2)((1 + \alpha_1)\delta_0 + 1)}{(2n + \alpha_1 + 2)(2n + \alpha_1 + 4)} \frac{\frac{-2\alpha}{(2n+2c+\alpha+2)(2n+2c+4+\alpha)} - b}{a}$$

reduzindo ao mesmo denominador resulta que $a = 1$ e $b = 0$. Logo, a equação anterior toma a forma

$$(\alpha_1 + 2)((1 + \alpha_1)\delta_0 + 1)(2n + 2c + \alpha + 2)(2n + 2c + \alpha + 4) = -\alpha(2n + \alpha_1 + 4)(2n + \alpha_1 + 2)$$

Comparando os coeficientes das potências em n temos que o coeficiente do termo em $[n^2]$ é o seguinte:

$$(4.7) \quad a(\alpha_1 + 2)((1 + \alpha_1)\delta_0 + 1) = -\alpha.$$

O coeficiente do termo em $[n]$ é dado por

$$a(\alpha_1 + 2)((1 + \alpha_1)\delta_0 + 1)2(2c + 4 + \alpha + 2c + 2 + \alpha) = -\alpha 2(2\alpha_1 + 6)$$

substituindo nesta equação a expressão (4.7) e determinamos a expressão de c em função de α e de α_1

$$c = \frac{\alpha_1 - \alpha}{2}.$$

Para determinar a expressão relativa a d fazemos o seguinte:

$$\delta_0 = \beta_0 - d \Leftrightarrow \delta_0 = \frac{-2}{\alpha + 2} - d \Leftrightarrow d = \frac{-2}{2 + \alpha} - \delta_0.$$

Deste modo encontrámos os polinómios co-recursivos dos polinómios de Bessel que são dados pela seguinte relação:

$$\mathcal{B}_n^{\alpha_1} = (L_n^\alpha)^{(c)} \left(x; \frac{-2}{2 + \alpha} - \delta_0 \right).$$

De seguida vamos ver o que se passa com as medidas de ortogonalidade dos polinómios de Hermite, Laguerre e Jacobi e como poderemos a partir destas determinar as medidas de ortogonalidades destas novas famílias de polinómios ortogonais.

É de salientar esta nova família de polinómios co-recursivos dos clássicos também são polinómios do tipo Pollaczek.

Os resultados de Pollaczek em [26] permitem explicitar a medida de ortogonalidade dos sistemas de polinómios ortogonais clássicos como foi feito por Bustoz e Ismail em [9] ou por Askey e Wimp em [3] ou por Wimp em [33].

Para a sucessão de polinómios de Hermite, $\{H_n\}$ onde os pesos são dados por $\omega^{(2\nu_1-1)}(x)$, a medida de ortogonalidade tem a seguinte expressão:

$$\omega^{(c)}(x) = \frac{(\Gamma(c+1))^2 2^{-c} e^{-x^2}}{\int_0^\infty |c e^{(-t^2-2ixt)} t^{c-1}|^2 dt}$$

onde $c = 2\nu_1$ e Γ é a função Gamma.

A medida de ortogonalidade para os polinómios de Laguerre é a seguinte:

$$\omega^{(c)} = \frac{x^\alpha e^{-x}}{|\Psi(c, 1-\alpha; x e^{-\pi i})|^2}$$

onde Ψ é a função de Tricomi e para os polinómios de Jacobi, $\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$, que vão ser ortogonais em $[0, 1]$ a medida de ortogonalidade é dada por

$$\omega^{(\delta)} = \frac{(1-x)^\alpha x^\beta}{|F(\delta, 2-\gamma-\delta, 1-\beta; x) + K(\delta)(-x^\beta)F(\beta+\delta, \beta+2-\gamma-\delta, 1+\beta; x)|^2}$$

onde $K(\delta) = \frac{\Gamma(-\beta)\Gamma(\beta+\delta)\Gamma(\delta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta+\gamma-1-\beta)\Gamma(\delta)}$ e $\delta = \alpha + \beta + 1$.

O resultado seguinte permite-nos determinar a medida associada a uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos co-recursiva quando é conhecida a medida inicial, sendo esta medida definida como anteriormente.

TEOREMA 4.1 ((Dehesa, Marcellán e Ronveaux em [21]). *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associados com medida de Borel positiva ω . Então, a transformada de Stieltjes, $S(z, \omega^d)$, da medida correspondente a $P_n(x; d)$ é dada por*

$$(4.8) \quad S(z, \omega^d) \frac{S(z, \omega)}{d \ S(z, \omega) + 1} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp } \omega.$$

Demonstração: Por definição de transformada de Stieltjes da medida co-recursiva temos

$$S(z; \omega^d) = \frac{1}{z - (\beta_0 - d) - \frac{\gamma_1}{z - \beta_1 - \frac{\gamma_2}{\ddots}}}$$

Calculando o inverso desta expressão obtemos

$$\frac{1}{S(z, \omega^d)} = z - (\beta_0 - d) - \frac{\gamma_1}{z - \beta_1 - \frac{\gamma_2}{\ddots}}$$

ou seja,

$$S(z, \omega^d) = \frac{S(z, \omega)}{d \ S(z, \omega) + 1}$$

que é a medida pretendida. ■

Aplicando o Teorema 4.1 encontramos a medida de ortogonalidade associada a estas novas famílias de polinómios ortogonais mónicos.)

Bibliografia

- [1] N.I.Akhiezer, *The Classical Moment Problem*, Hafner Publ. Co., N.Y., 1965.
- [2] G.Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special functions*, Enc. of Math. and Aplic.,71, Cambridge University Press, 1999.
- [3] R. Askey and J. Wimp, *Associated Laguerre and Hermite polynomials*, Proc.Royal Soc. Edinburgh. **96 A** (1984), 15–37.
- [4] A. Branquinho, *Problemas Inversos na Teoria dos Polinómios Ortogonais*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1996.
- [5] A. Branquinho, A. Foulquié Moreno, *A non-homogeneous linear differential equations that as orthogonal polynomial solutions*, Pré-Publicações. Dep. de Matemática da Universidade de Coimbra n°95-22 (1995), 17.
- [6] . Branquinho, *A note on semi-classical orthogonal polynomials*, Bull. Belg. Math. Soc. 3 (1996), 1-12.
- [7] . Branquinho and F. Marcellán, *Generating new classes of orthogonal polynomials*, Internt. J. Math. & Math. Sci. Vol.19 n°4 (1996), 643-656.
- [8] . Branquinho, F. Marcellán e J. Petronilho, *Classical orthogonal polynomials: a functional approach*, Acta Appl. Math. 34 (1994), n°3, 283-303.
- [9]
- [10] . Bronson, *Moderna Introdução às equações diferenciais*, Coleção Schaum, MacGraw-Hill, 1977.
- [11] . Bustoz and M.E.H. Ismail, *The associated ultraspherical polynomials and their q-analogues*, Canad. J. Math. **34** (1982), 718–736.
- [12] . Cartan, *Elementary theory of analitic functions of one or several variables*, Editions Scientifiques Hermann, Paris,1963.
- [13] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [14] J.S. Dehesa, F. Marcellán, and A. Ronveaux, *On orthogonal polynomials with perturbed relations*, J. Comp. App. Math. **30** (2) (1990), 203–212.
- [15] J. Favard, *Cours D'Analyse de L'Ecole Plytechnique*, Tome III, Théorie des Equations, Fascicule I, Equations différentielles, Paris, Gauthier-Villars, 1962.

- [16] T.W. Gamelin, *Complex Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2001.
- [17] W. Hahn, *On Differential Equations for Orthogonal Polynomials*, Funkcialaj Ekvacioj, 21 (1978) 1-9.
- [18] O.E. Lancaster, *Orthogonal polynomials defined by difference equations*, Amer.J.Math., 63(1941), 185-207.
- [19] F. Marcellán, *Polinomios ortogonales semiclassicos : Una aproximacion constructiva*, Actas V Simposium Polinomios Ortogonales (Vigo)(A.Cachafeiro e E.Godoy, eds), 1988, pp.110-123.
- [20] F. Marcellán and A. Ronveaux, *Co-recursive orthogonal polynomials and fourth order differential equation*, J. Comp. Appl. Math. **25** (1) (1989), 105–109.
- [21] F. Marcellán, J.S. Dehesa and A. Ronveaux, *On orthogonal polynomials with perturbed recurrence relations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 30, n. 2 (1990), pp.203-212.
- [22] P.J.McCarthy, *Characterizations of classical polynomials*, Port.Math.20, n°1 (1961), 47-52.
- [23] P.Montel, *Leçonssur les Récurrences et leur Applications*, Gauthier Villars, Paris, 1957.
- [24] A.Nikiforov, V. Ouvarov, *Éléments de la Théorie des Fonctions Spéciales*, Éditions MIR, Moscou, 1976.
- [25] H. Poincaré, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies*, Amer. J. Math. 7 (1985), 203-258.
- [26] F. Pollaczek, *Sur la Généralisation des Polynômes de Jacobi*, Mémorial des Sciences Mathématiques, CXXI, Paris, 1956.
- [27] A. Ronveaux, *Fourth-order differential equations for the numerator polynomials*, J. Phys. A.: Math. Gen. **21** (1988), L749–L753.
- [28] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1987 (Tirth edition).
- [29] G.Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer.Math. Soc. Colloq.Publ., vol.23, Providence, Rhode Island, 1975(Quarta edição).
- [30] J.Vicente Gonçalves, *Sur une formule de recurrence*, Portugaliæ Math. **3** (3) (1942), 222–233.
- [31] ———, *Sur la formule de Rodrigues*, Portugaliæ Math. **4** (1) (1943), 52–64.
- [32] B. Wendroff, *On orthogonal polynomials*, Proc.Amer.Math.Soc.12 (1961), 554-555.
- [33] Wimp, *Explicit formulas for the associated Jacobi polynomials and some aplications*, Can. J. Math. 39(4)(1987), 938-1000.

Índice

- caracterização
 - McCarthy, 50
 - polinómios discretos, 49
- convergência
 - pontual, 7
 - uniforme, 8
- determinante
 - Hankel, 3
- equação
 - determinantal, 23
 - Fuchs
 - primeiro tipo, 23
 - segundo tipo, 23
 - Equação de Gauss, 23
- fórmula
 - Leibniz, 40
- fórmula de Rodrigues, 53
 - polinómios clássicos, 54
- função
 - geradora, 7
 - segunda espécie, 61
- funcional
 - definida-positiva, 4
 - linear, 1
 - regular, 4
- método Laplace, 24
- operador
 - discreto, 39
 - inverso, 41
- polinómios
 - associados
 - ordem superior, 26
 - primeira ordem, 25
 - Chebychev, 31
 - discretos
 - fórmula de Rodrigues , 44
 - Hermite, 17, 31
 - co-recursivos, 69
 - Jacobi
 - co-recursivos, 72
 - Laguerre
 - co-recursivos, 70
 - Legendre generalizados, 36
 - ortogonais
 - zeros, 18
 - Pollaczek, 28
 - Tchebychev
 - primeira espécie, 2
- sistema
 - singular regular, 22
- sucessão
 - momentos, 2
 - polinómios
 - ortogonais, 2

- ortogonais mónicos, 3
- ortonormais, 3
- polinómios ortogonais
 - co-recursivos, 60
- teorema
 - Fuchs, 22
 - Markov, 26
 - Poincaré, 10
 - Sturm, 55
 - Vicente Gonçalves, 52
 - Wendroff, 19
- transformada de Stieltjes
 - polinómios co-recursivos, 74
- variável
 - transformação afim, 60